ESEMPIO: Date le matrici

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ calcola $-2A \cdot B + 5C =$

$A \in \mathcal{M}_{2\times3}$ $B \in \mathcal{M}_{3\times2}$

$$= -2\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & 5 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & +2 \\ -24 & +2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & 5 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12+5\sqrt{2} & 7 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}$$

Possiamo associare ad una matrice solo quadrata, un numero.

Data una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, possiamo associarle un numero reale, detto determinante di A: si indica $\det A$, $\mathrm{Det} A$, $|A|$, $\|A\|$...
Si applica a matrici quadrate di qualunque ordine.
Cominciamo con una matrice $A \in \mathcal{M}_{1\times1}(\mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{A = a \Rightarrow \det A = a}$

Sia ora $A \in \mathcal{M}_{2\times2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$ pongo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
CONSIDERO L'ELEMENTO a_{ij}: A TALE ENTRATA È ASSOCIATO UN SEGNO CHE SI DETERMINA CONSIDERANDO $(-1)^{i+j}$;
QUINDI:
ogni posizione delle entrate è associato ad un segno, se $(i+j)$ è dispari il segno è $(-)$, se $(i+j)$ è pari, il segno è $(+)$
Se ho una matrice $n\times n$ si può partire con un "+" ASSOCIATO ALLA ENTRATA a_{11}, E alternare con il "−" LUNGO LE RIGHE E LE COLONNE.
SCEGLIAMO UNA RIGA DI A (AD ESEMPIO LA PRIMA) ⇒ mi fermo qua perché ho esaurito le entrate
$\Rightarrow \det A = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
DELLA RIGA SCELTA.

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11}(\det a_{22}) + (-1)^{1+2} a_{12}(\det a_{21})$$

ESEMPIO

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1\cdot4 - 2\cdot3 = -2$

Per comodità scegliamo la prima riga, ma scegliendo una qualsiasi altra riga o colonna, il risultato di det A non cambia.
INFATTI SE
scelgo la 2° colonna di A $\Rightarrow \det A = (-1)^{1+2} a_{12} \cdot (\det a_{21}) + (-1)^{2+2} a_{22}(\det a_{11}) =$
$= -2\cdot3 + 4\cdot1 = -2.$

Considero LA PRIMA RIGA $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \det A = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overbrace{+ a_{12}}^{(-1)^{1+2}} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \overbrace{+ a_{13}}^{(-1)^{1+3}} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

(QUESTA MATRICE SI OTTIENE TOGLIENDO LA PRIMA RIGA E LA PRIMA COLONNA DI A)
(QUESTA TOGLIENDO IN A LA 1ª RIGA E LA 2ª COLONNA)
(QUESTA TOGLIENDO IN A LA 1ª RIGA E LA 3ª COLONNA)

OSSERVAZIONE PER LA SCELTA DELLA RIGA
Più zeri ho, più scelgo per comodità nei calcoli la riga (O LA COLONNA) CHE CONTIENE TALI ZERI.

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

ESEMPIO

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ \sqrt{2} & 1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ \sqrt{2} & 1 & 3\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}-1 & -1\\ \sqrt{2} & 3\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}-1 & -1\\ \sqrt{2} & 1\end{vmatrix} =$$

$$= -2 + 2(-1+\sqrt{2}) = -4 + 2\sqrt{2}$$

Regola di Laplace per il calcolo del determinante di $A \in \mathcal{M}_{N\times N}$

Scegliamo la i-esima riga di $A \Rightarrow$

$\Rightarrow |A| = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{\hat{ij}}|$ dove $A_{\hat{ij}}$ è la sottomatrice di A ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna di A. Il termine $(-1)^{i+j}|A_{\hat{ij}}|$ è detto complemento algebrico dell'elemento a_{ij}.

DEFINIZIONE: Chiamiamo SOTTOMATRICE di una matrice $A \in \mathcal{M}_{P\times N}$, la la matrice che rimane da A, togliendo k righe $0 \le k < P$ e h colonne, $0 \le h < N$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix}\boxed{1 \quad 2 \quad 3} & \cancel{7}\\ \cancel{4} & \cancel{5} \quad \cancel{6} \quad \cancel{8}\end{pmatrix}$$: HO TOLTO UNA RIGA (LA 2ª) ED UNA COLONNA (LA 4ª) : $\Rightarrow$ (1 2 3) È SOTTOMATRICE DI A

DEFINIZIONE: si dice MINORE di una matrice A il determinante di una sua sottomatrice quadrata

Si possono togliere righe e/o colonne, cioè si possono togliere righe o colonne o ENTRAMBE

ESEMPIO

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cancel{3} & \cancel{7}\\ 4 & 5 & \cancel{6} & \cancel{8}\end{pmatrix}$$

Se $A \in \mathcal{M}_{N\times N}$, A matrice quadrata di ordine $N \Rightarrow$ si definiscono minori principali o minori di Nord-Ovest di A in questo modo

Se $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N}\\ \vdots & & & \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN}\end{pmatrix} \Rightarrow a_{11}$ è il minore principale di ordine 1 di A

$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ è il minore principale di ordine 2 di A

$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ è il minore principale di ordine 3 di A

il minore principale di ordine k è il determinante della sottomatrice ottenuta cancellando le i-esime per $i = k+1, k+2, \dots, N$ e le j-esime colonne, per $j = k+1, k+2, \dots, N$

Proprietà del determinante

1) Se una matrice A ha una riga o una colonna formata da tutti zeri $\Rightarrow |A| = 0$

2). Se scambiamo fra loro due righe (o due colonne) di A il determinante cambia segno

3) Se moltiplico una riga (o una colonna) di A per uno scalare $K \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ il determinante risulta moltiplicato per K

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -2$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A'| = -6 = 3 \cdot (-2)$$

4) Se moltiplico tutta la matrice $(A \in M_{n \times n})$ per K, ottenendo $A' = KA \Rightarrow |KA| = K^n |A|$

5) Se due righe (o due colonne) di A sono uguali (hanno le stesse entrate) $\Rightarrow \det A = 0$

DIMOSTRIAMO 5) PER INDUZIONE sull'indice della matrice, N:

① VERIFICA: PER N=1 (OVVIO)
VERIFICA: PER N=2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a \cdot b - b \cdot a = 0$ (PROPRIETÀ COMMUTATIVA DI $(\mathbb{R}, \cdot)$)

② SUPPONIAMO VERO FINO A N=K E DIMOSTRIAMOLO PER N=K+1

SIA $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \cdots & a_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix}$ suppongo che la 2° e la 3° riga coincidono, cioè

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k+1)} \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{N(k+1)} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2(k+1)} \\ a_{22} & \cdots & a_{2(k+1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(k+1)2} & & a_{(k+1)(k+1)} \end{vmatrix}}_{=0 \text{ (PER IPOTESI INDUTTIVA)}} - a_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots \\ a_{21} & a_{31} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{vmatrix}}_{=0 \text{ (PER IPOTESI INDUTTIVA)}} \cdots = 0$$

6. Se una riga di A è multipla di un'altra

ESEMPIO

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1N} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3N} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & a_{NN} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$