Il calcolo degli autovettori degli operatori ha permesso di analizzare una grande quantità di problemi

Per esempio i suoni di una corda di uno strumento musicale sono la sovrapposizione di suoni con precisi valori di frequenza: si è scoperto che queste frequenze sono legate agli autovalori di un opportuno operatore simmetrico (che dipende dalla lunghezza e dalla tensione della corda) e che i corrispondenti autovettori sono le armoniche della oscillazione della corda

Un'analisi del genere vale per qualunque strumento musicale: le frequenze sono legate agli autovalori e la forma delle oscillazioni dipende dagli autovettori di un opportuno operatore.

Altro esempio importante è quello dei livelli energetici degli elettroni degli atomi, autovalori di un opportuno operatore, mentre la forma delle funzioni d'onda corrispondente a questi livelli (orbitali) è un (autovettore) autospazio!

Praticamente quasi tutte le principali quantità della fisica atomica e subatomica sono descrivibili come autovettori: la meccanica quantistica è stata anche chiamata "meccanica delle matrici"

N.B: Fisica della materia legata alle matrici, autovalori, autospazi ...

17/03/2014 (1)

Es: $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se $[T]_e^e = A$

$$\Rightarrow T((x,y,z)) = (x+2y,\ 2y,\ -2x-2y-z)$$

Vediamo se A è diagonalizzabile.

Se sì, determinare D ed S | $D = S^{-1}AS$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2$ con $\mu(2) = 1$ molteplicità algebrica

$\lambda_2 = 1$ con $\mu(1) = 1$

$\lambda_3 = -1$ con $\mu(-1) = 1$

Abbiamo trovato 3 autovalori distinti, quindi la matrice A e quindi T è diagonalizzabile.

LA MATRICE DIAGONALE D E' DEFINITA A MENO DELL'ORDINE DEGLI AUTOVALORI SULLA DIAGONALE. AD ESEMPIO:

$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ora, a seconda di come scelgo D, devo trovare S. Devo cioè rispettare l'ordine con cui scelgo di costruire D PER TROVARE L'ORDINE DEGLI ELEMENTI DI BASE

Trovo la base degli autovettori.:

Cerchiamo gli autospazi e cerchiamo i vettori di base.

$$\Rightarrow E_2 : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+2y=0 \\ -2x-2y-3z=0 \end{cases} \begin{cases} 2y = x \\ z = -x \end{cases}$$

$: \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$ la retta generata da questo vettore è E_2.

$$E_1 : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases} \quad E_1 : \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$$

$$E_{-1} : \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad E_{-1} : \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$$

$\mathcal{B} : \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ questa è una base possibile di autovettori

$$\Rightarrow S : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} : \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \dots \text{ QUINDI } D = S^{-1} A S$$

— — — — —

<u>Definizione:</u> Chiamiamo FORMA un'applicazione definita su uno spazio vettoriale a valori in un campo.

<u>Definizione:</u> Una forma lineare è una forma che soddisfa le proprietà di linearità.

Esempio: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y, z) \longmapsto x^2 y z$. È lineare?

Vediamo se $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha^2 x^2 \alpha y \alpha z = \alpha^4 x^2 y z$

$\alpha f(v) = \alpha(f(x, y, z)) = \alpha (x^2 y z)$ in questo caso non sono uguali.

$\Rightarrow$ È una forma ma non è lineare.

—

In generale una forma lineare è data da $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$
APPLICAZIONE LINEARE DEFINITA SU UNO SPAZIO VETTORIALE V, CON VALORI IN UN CAMPO (COME $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow \{ L : V \to \mathbb{R} \text{ lineari} \} = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ oppure $= V^*$ oppure $V^\vee$. E questo spazio è detto SPAZIO <u>DUALE</u> di V.

OSSERVAZIONE: V^* è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$:

Si definiscono le operazioni di addizione. Date $L_1 : V \to \mathbb{R}$ ed $L_2 : V \to \mathbb{R} \Rightarrow L_1 + L_2 : V \to \mathbb{R}$ tale che $(L_1+L_2)(v) = L_1(v) + L_2(v)$ $\forall v \in V$.

Analogamente, $(\alpha L)(v) = \alpha(L(v))$ $\forall v \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO:
Dimostrare che V^* è uno spazio vettoriale con le operazioni date.

Sia $\dim V = n$ e considero $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Costruisco le forme lineari seguenti: $\varphi_1 : V \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} v_1 &\longmapsto 1 \\ v_2 &\longmapsto 0 \\ &\vdots \\ v_n &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

(È SUFFICIENTE DARE LE IMMAGINI DEI VETTORI DI BASE PERCHÉ L'APPLICAZIONE È LINEARE)

quale è l'immagine di $v \in V \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \Rightarrow \varphi_1(v) = \varphi_1\left(\sum_1^n a_j v_j\right) =$
$= \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_1(v_j) = a_1$.

Costruisco $\varphi_2 : V \to \mathbb{R}$ e così via $\varphi_n : V \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} v_1 &\longmapsto 0 \\ v_2 &\longmapsto 1 \\ &\vdots \\ v_n &\longmapsto 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} v_1 &\longmapsto 0 \\ v_2 &\longmapsto 0 \\ &\vdots \\ v_{n-1} &\longmapsto 0 \\ v_n &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

[Tali applicazioni sono le applicazioni δ di KRONEKER δ_{ij} oppure δ_i^j

$$\delta_{ij} = \delta_i(v_j) \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Ho costruito n forme lineari che costituiscono una base di V^* (DETTA BASE DUALE DI $B = \{v_1, \dots, v_n\}$):
dimostriamo che: 1) Sono linearmente indipendenti e 2) generano V^*

1) Sia $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots \alpha_n \varphi_n = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$ $\forall j = 1, \dots, n$

$[\varphi_2]_B^1 = (0, 1, 0 \dots 0)$ $\qquad (\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots \alpha_n \varphi_n)(v_1) = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 \varphi_1(v_1) + \alpha_2 \varphi_2(v_1) + \dots + \alpha_n \varphi_n(v_1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

Faccio la stessa cosa per tutti gli altri vettori di base.

$(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \dots + \alpha_n\varphi_n)(v_n) = 0 \Rightarrow \alpha_1\varphi_1(v_n) + \alpha_2\varphi_2(v_n) + \dots + \alpha_n\varphi_n(v_n) = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono lin. indipendenti.

) Sia $L \in V^*$ $\Rightarrow L(v) = L(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 L(v_1) + \dots + a_n L(v_n)$

DEVO DIMOSTRARE CHE L È COMBINAZIONE LINEARE DI $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

se considero la combinazione lineare ~~...~~

~~...~~ $L(v_1)\varphi_1 + L(v_2)\varphi_2 + \dots + L(v_n)\varphi_n \Rightarrow$

IL VALORE DI TALE COMBINAZIONE SU OGNI VETTORE DELLA BASE, v_j SARÀ:

$$\left(L(v_1)\varphi_1 + L(v_2)\varphi_2 + \dots + L(v_n)\varphi_n\right)(v_j) =$$

$$= L(v_1)\underbrace{\varphi_1(v_j)}_{=0} + L(v_2)\underbrace{\varphi_2(v_j)}_{=0} + \dots + L(v_n)\varphi_n(v_j) = L(v_j)\underbrace{\varphi_j(v_j)}_{=1} = L(v_j)$$

E QUINDI COINCIDE CON IL VALORE DI L IN $v_j \Rightarrow L = L(v_1)\varphi_1 + L(v_2)\varphi_2 + \dots + L(v_n)\varphi_n$

OSSERV: $\exists$ un' isomorfismo che manda una base nella sua base duale $V \to V^*$, che non è canonico, perché dipende dalla base.

OSSERV: Se faccio il duale del duale V^{**}, posso DEFINIRE un isomorfismo CANONICO TRA V^{**} e V.