FORMA CANONICA DI UNA QUADRICA: $\pm \frac{x_1^2}{a_1^2} \pm \frac{x_2^2}{a_2^2} \pm \dots \pm \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$

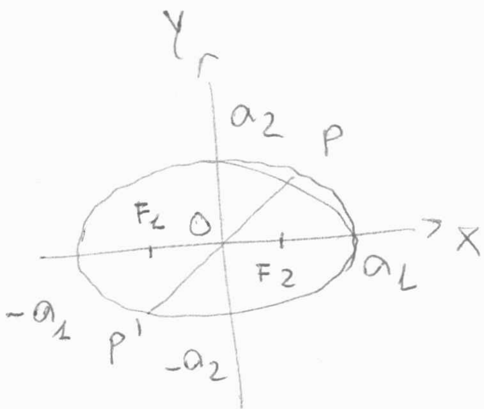
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ ELLISSE

$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ IPERBOLE

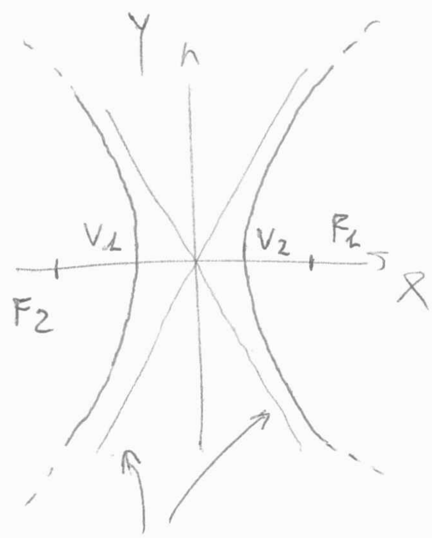
SONO CHIAMATE QUADRICHE A CENTRO PERCHÉ HANNO UN CENTRO DI SIMMETRIA.

SE LA QUADRICA È DATA IN FORMA CANONICA IL CENTRO DI SIMMETRIA È L'ORIGINE

ELLISSE




IPERBOLE




IN $\mathbb{R}^3$ LE QUADRICHE A CENTRO POSSIBILI SONO 3

$\boxed{+\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1}$ ELLISSOIDE

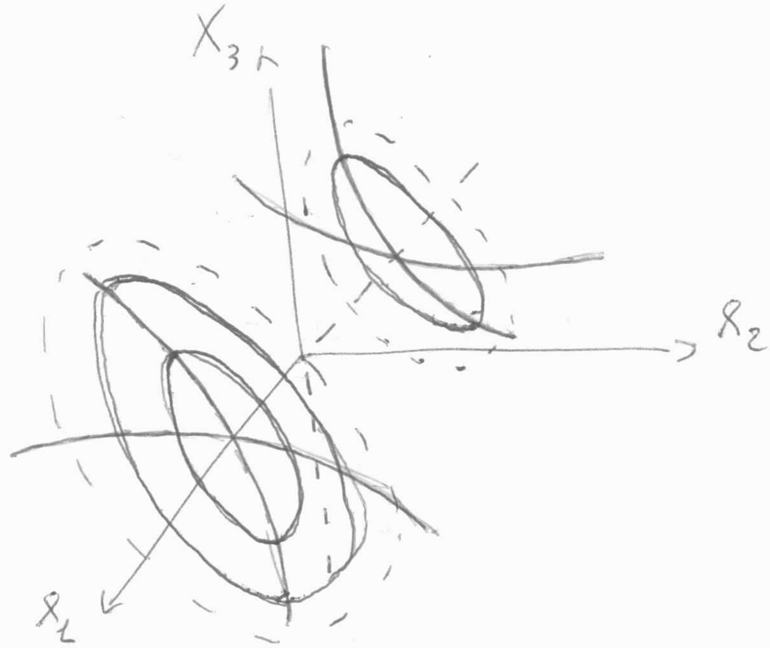
$\boxed{\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1}$ IPERBOLOIDE A UNA FALDA

$\boxed{\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1}$ IPERBOLOIDE A DUE FALDE

MENTRE IN $\mathbb{R}^2$ LE QUADRICHE SONO CURVE IN $\mathbb{R}^3$ SONO SUPERFICI

# STUDIO DI UNA QUADRICA IN $\mathbb{R}^3$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

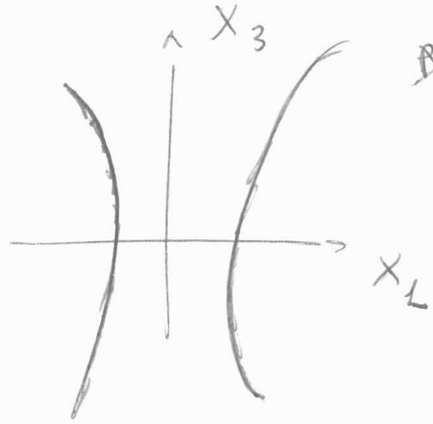



INTERSEZIONE TRA LA SUPERFICIE ED IL PIANO $x_1=0$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -\dfrac{x_2^2}{a_2^2} - \dfrac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \end{cases}$$ IMPOSSIBILE

INTERSEZIONE TRA LA SUPERFICIE ED IL PIANO $x_2=0$

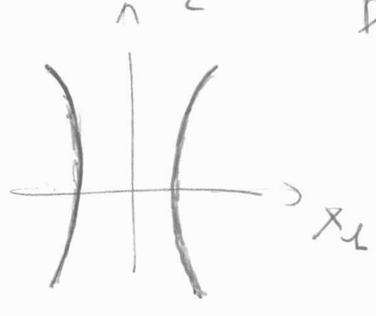
$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \dfrac{x_1^2}{a_1^2} - \dfrac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \end{cases}$$ IPERBOLE




~~PROIEZIONE~~ SEZIONE NEL PIANO $x_2=0$

INTERSEZIONE TRA LA SUPERFICIE ED IL PIANO $x_3=0$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ \dfrac{x_1^2}{a_1^2} - \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = 1 \end{cases}$$ IPERBOLE




~~PROIEZIONE~~ SEZIONE NEL PIANO $x_3=0$

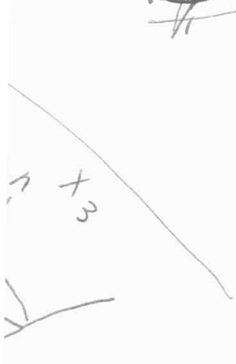
SSI

SISTEMA DI RIFERIMENTO

PER

OTATO E/O

RASLATO



SE IL TERMINE NOTO È NULLO, LA QUADRICA HA LA SEGUENTE FORMA CANONICA:

$$\frac{X_1^2}{a_1^2}+\frac{X_2^2}{a_2^2}+\dots+\frac{X_p^2}{a_p^2}-\frac{X_{p+1}^2}{a_{p+1}^2}-\dots-\frac{X_m^2}{a_m^2}=0$$

POICHÉ È POSSIBILE MOLTIPLICARE PER $-1$ SENZA MODIFICARE LA SUPERFICIE:

- SE $m$ È PARI I CASI POSSIBILI SONO $\frac{m}{2}$
- SE $m$ È DISPARI I CASI POSSIBILI SONO $\frac{m-1}{2}$

SE IL PUNTO P AVENTE COORDINATE $(X_1, \dots X_m)$ APPARTIENE ALLA QUADRICA Q ALLORA ANCHE IL PUNTO AVENTE COORDINATE $(\lambda X_1, \lambda X_2, \dots, \lambda X_m)$ $\lambda \in \mathbb{R}$ APPARTIENE ALLA QUADRICA. QUINDI TUTTA LA RETTA PER O e PER P APPARTIENE ALLA QUADRICA: TALI QUADRICHE SONO DETTE <u>RIGATE</u>

IN SIMBOLI:

$$P=(X_1,\dots,X_m)\in Q \Rightarrow P'=(\lambda X_1,\dots,\lambda X_m)\in Q \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO IN $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{X_1^2}{a_1^2}-\frac{X_2^2}{a_2^2}=0 \quad \to \quad \left(\frac{X_1}{a_1}+\frac{X_2}{a_2}\right)\left(\frac{X_1}{a_1}-\frac{X_2}{a_2}\right)=0$$

DUE RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE

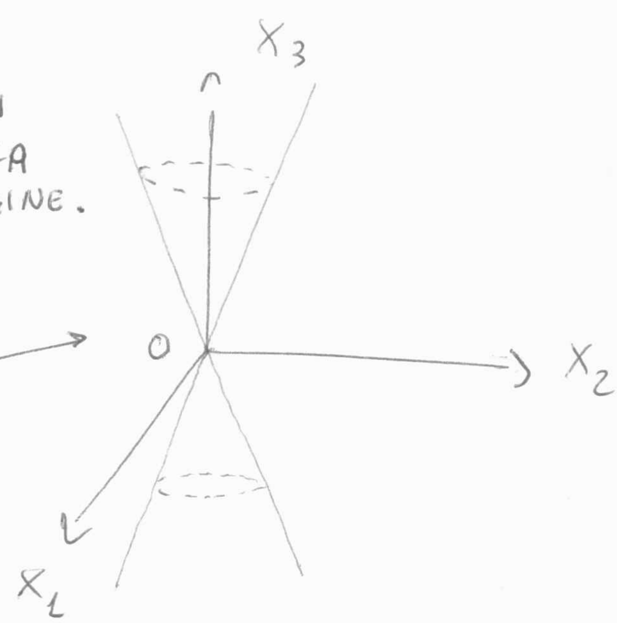
ESEMPIO IN $\mathbb{R}^3$:

$$\cancel{\frac{X_1^2}{a_1^2}+\frac{X_2^2}{a_2^2}+\frac{X_3^2}{a_3^2}=0}$$

LA QUADRICA SI RIDUCE ALLA SOLA ~~IMPOSSIBILE~~ ORIGINE.

$$\frac{X_1^2}{a_1^2}+\frac{X_2^2}{a_2^2}-\frac{X_3^2}{a_3^2}=0$$

CONO




$$\cancel{\frac{X_1^2}{a_1^2}-\frac{X_2^2}{a_2^2}-\frac{X_3^2}{a_3^2}=0}$$

È L'EQUAZIONE PRECEDENTE MOLTIPLICATA PER $-1$: LA SUPERFICIE È LA STESSA.

SE IL RANGO NON È MASSIMO :
DELLA FORMA QUADRATICA

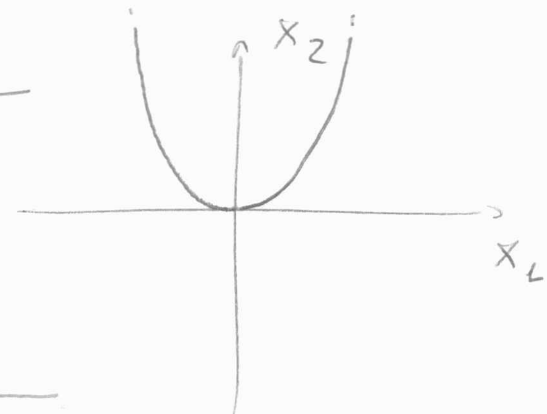
$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_p^2}{a_p^2} - \dots - \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = x_n$$

QUADRICHE NON CENTRALI (NON SONO DEGENERI)

ANCHE IN QUESTO CASO MOLTIPLICARE PER $-1$ NON MODIFICA LA QUADRICA.

---

$\boxed{\text{IN } \mathbb{R}^2 :}$ $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} = x_2$ PARABOLA




---

$\boxed{\text{IN } \mathbb{R}^3 :}$ $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = x_3$ (fig. 1) PARABOLOIDE ELLITTICO

$\dfrac{x_1^2}{a_1^2} - \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = x_3$ ~~fig. 2~~ PARABOLOIDE IPERBOLICO (O SUPERFICIE A SELLA)

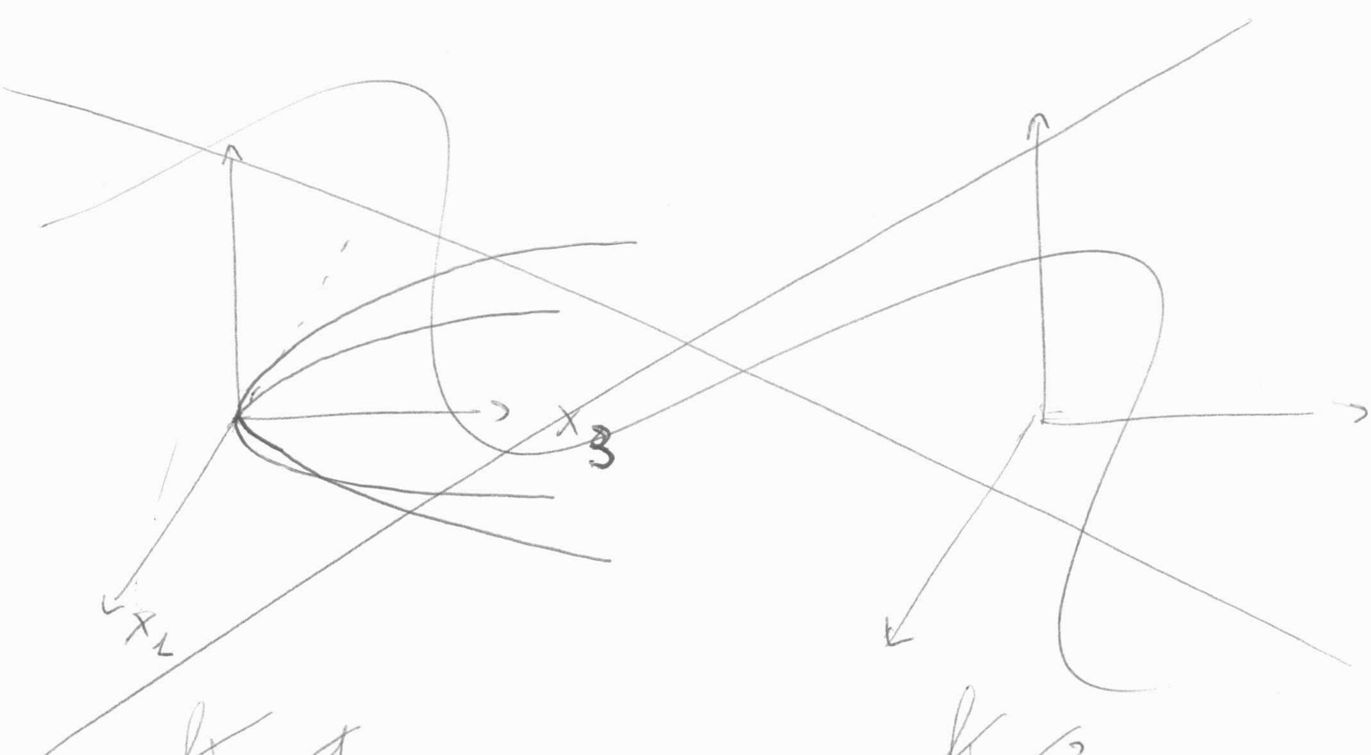



fig. 1 fig. 2

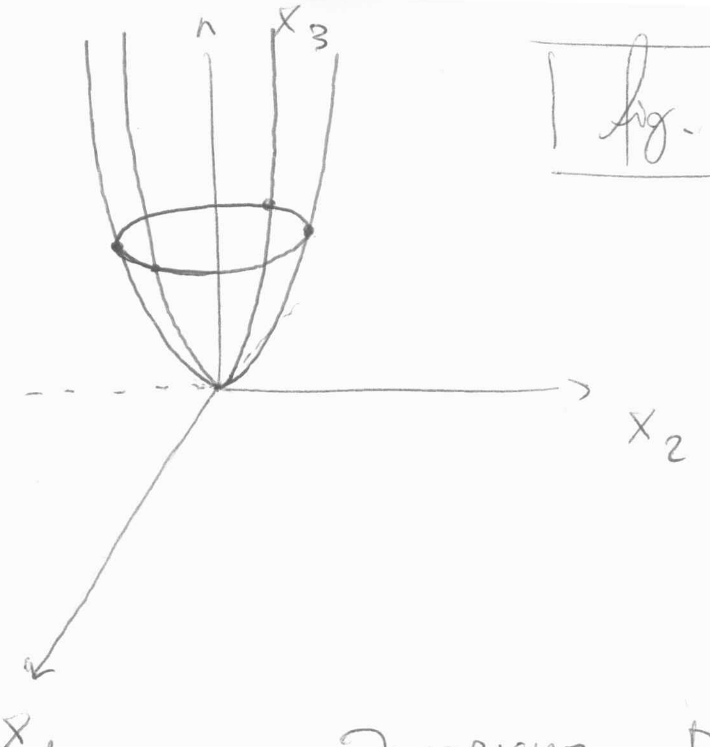



fig. 1

## QUADRICHE DEGENERI

SE L'EQUAZIONE NON CONTIENE TUTTE LE COORDINATE LA QUADRICA SI DICE DEGENERE

IN $\mathbb{R}^2$ $\quad \frac{x_1^2}{a_1^2} = C \quad$ con $C \geq 0$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - C = 0 \rightarrow \frac{x_1^2 - a_1^2 C}{a_1^2} = 0 \rightarrow x_1^2 - (\sqrt{C}\, a_1)^2 = 0$$

DUE RETTE PARALLELE

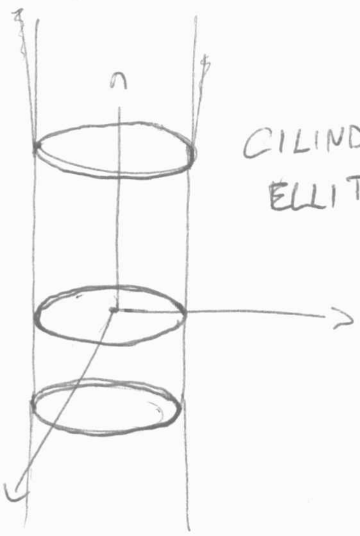
---

IN $\mathbb{R}^3$:

1) $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = C \qquad$ 3) $\frac{x_1^2}{a_1^2} = C \qquad$ 4) $\frac{x_1^2}{a_1^2} = x_2$

2) $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = C$

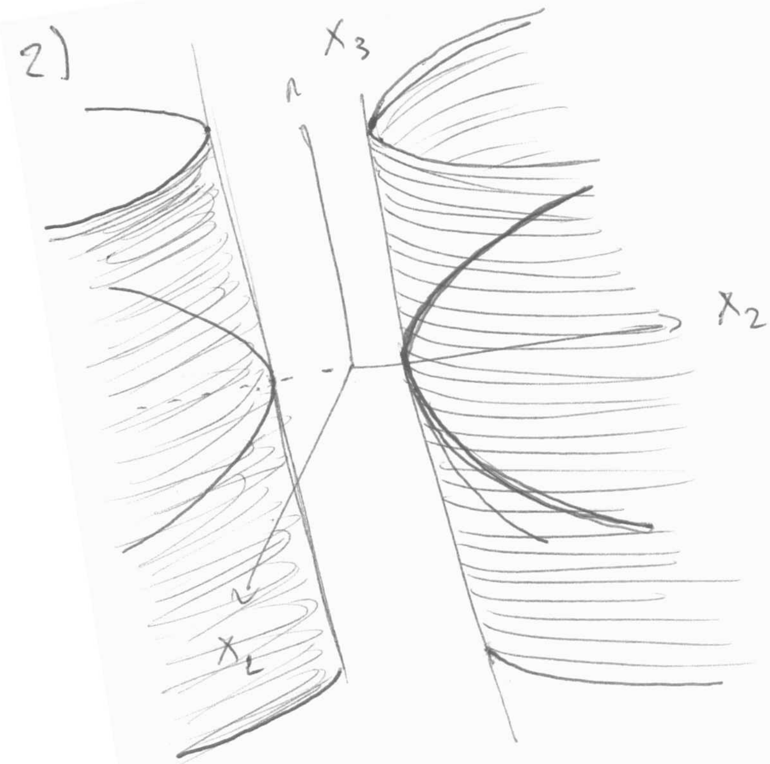
1)



CILINDRO ELLITTICO

CILINDRO IPERBOLICO

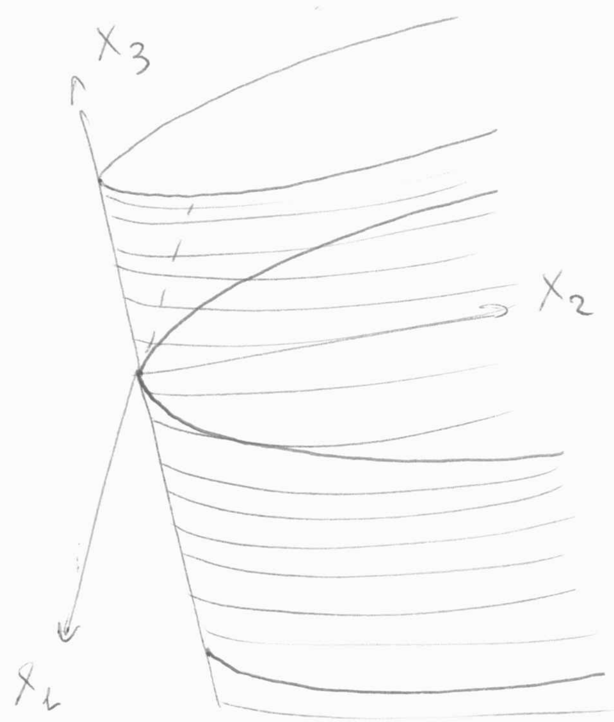
2)




3) Coppia di piani

CILINDRO PARABOLICO

4)



QUADRICHE CENTRALI NON DEGENERI

IPERBOLOIDE A UNA FACCIA

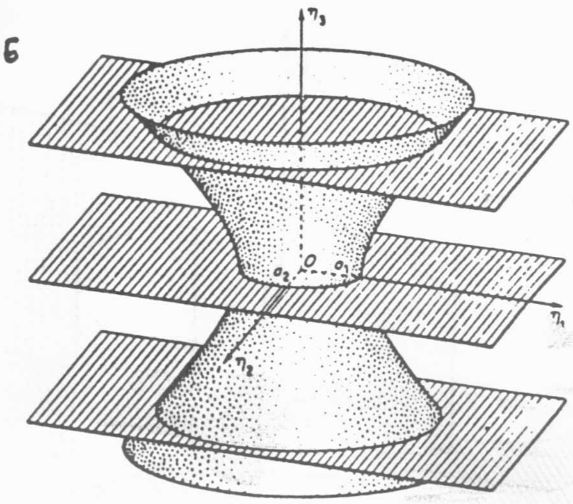
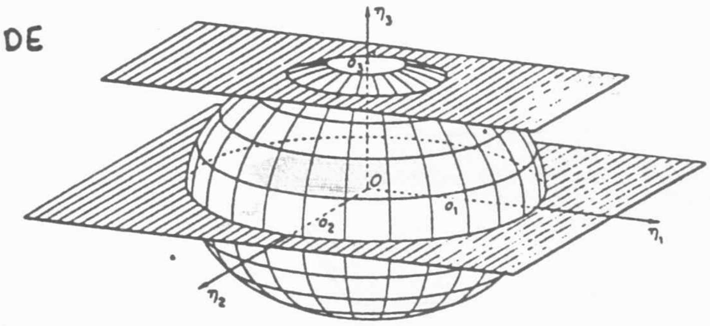
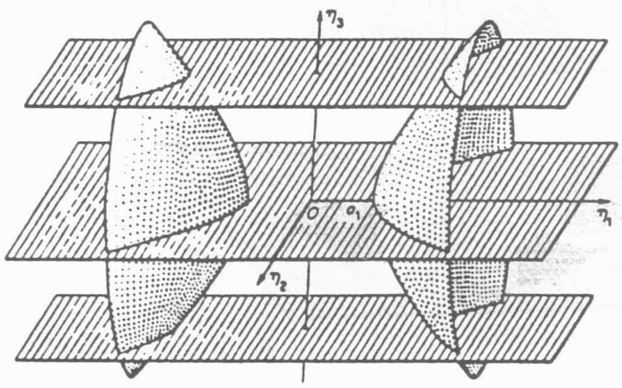



FIGURE 3

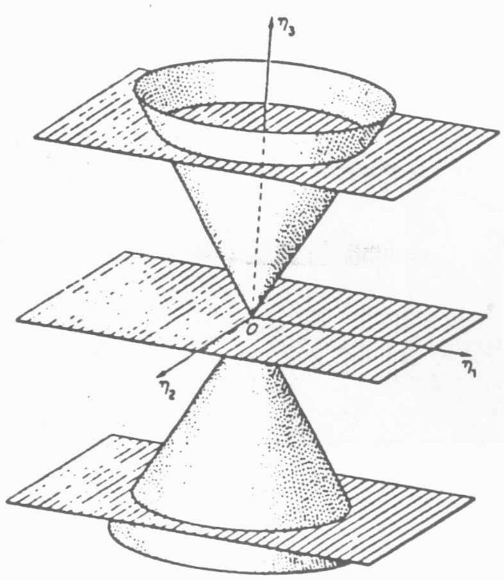
ELLISSOIDE



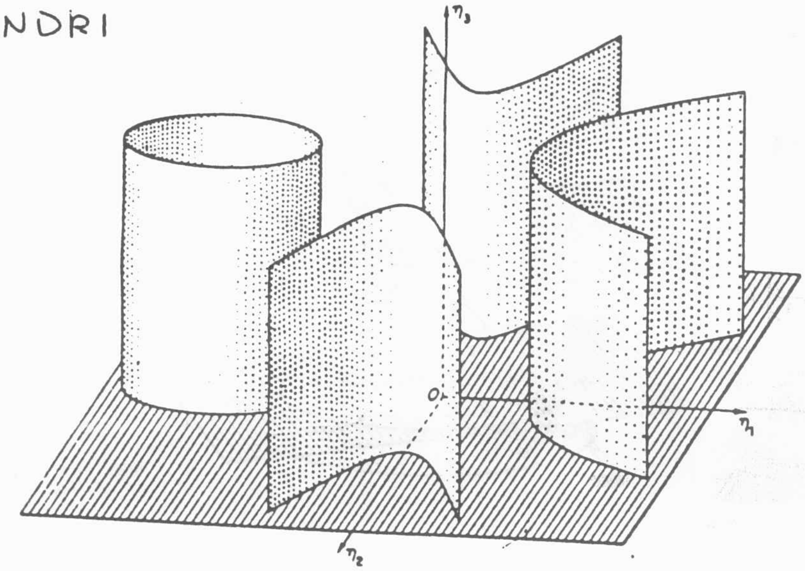

IPERBOLOIDE A DUE FACCE



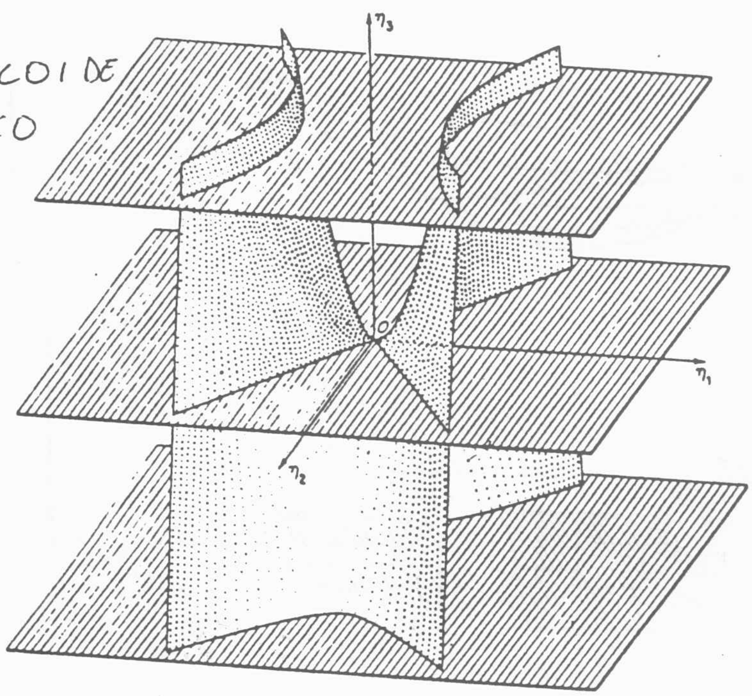

CONO

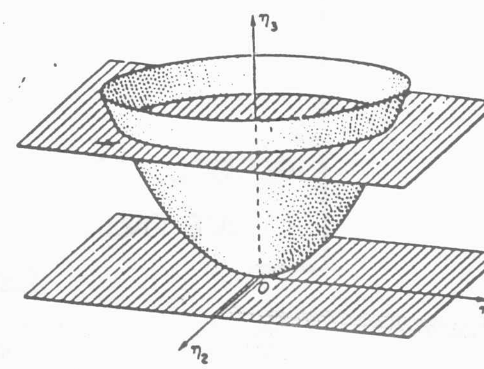


CILINDRI




PARABOLOIDE IPERBOLICO




PARABOLOIDE ELLITTICO