Determinanti

Proprietà:

7) Siano $A, B \in M_{n\times n} \Rightarrow |A\cdot B| = |A||B|$ (chiamato Teorema di Binét)

8) Siano $A, B \in M_{n\times n} \Rightarrow |A+B| \neq |A|+|B|$ (fare controesempio)

9) Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ $\Rightarrow$ Vediamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} \dots & b_{in}+c_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

i-esima riga →

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ b_{i1} & b_{i2} \dots & b_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ c_{i1} & c_{i2} \dots & c_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

10) Il determinante di una matrice diagonale è il prodotto degli elementi delle diagonale PRINCIPALE

~~Matrice invertibili~~

11) Se la matrice è triangolare inferiore o superiore il determinante è il prodotto delle ENTRATE DELLA DIAGONALE PRINCIPALE

Una matrice quadrata A è detta inversa di una matrice quadrata $B \Longleftrightarrow A\cdot B = B\cdot A = I_n$

Com'è il det di una matrice invertibile, cioè che ammette un' inversa? 1) SE $B \in M_{n\times n}$ E' INVERTIBILE $\Rightarrow$

$\exists A \in M_{n\times n}$ t.c. $A\cdot B = I \Rightarrow |A\cdot B| = |I_n| \Rightarrow |A|\cdot|B| = 1 \Rightarrow$

$|A| = \dfrac{1}{|B|}$ il det di B non può essere 0.

2) SE il determinante è diverso da 0 $\Rightarrow$ è invertibile (da verificare)

PERTANTO : $B \in M_{n\times n}$ E' INVERTIBILE $\Longleftrightarrow$ $\det B \neq 0$.

Rango della matrice

Dato un sistema lineare di p equazioni in n variabili $(\mathbb{R}) \Rightarrow$ possiamo associare due matrici a tale sistema:
Una matrice $A \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ detta matrice dei coefficienti (o matrice incompleta del sistema), ed una matrice $p \times (n+1)$ detta completa ottenuta dalla A aggiungendo una colonna $(n+1)$-esima B, formata dai termini noti del sistema: $(A \,\vdots\, B)$

Esempio.

MATRICE COEFFICENTI

TERMINI NOTI

$$\Sigma: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}, \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

VETTORE COLONNA PERCHE HA ~~1 RIGA~~ ~~E UNA COLONNA~~ 1 COLONNA

$$(A \,\vdots\, B) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Il sistema può essere riscritto matricialmente così:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\odot}{} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

in generale

$A \cdot X = B$ dove X = vettore colonna delle variabili

INFATTI: ESEGUENDO LA MOLTIPLICAZIONE FRA MATRICI $\odot$ OTTENIAMO:

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

OTTENIAMO IL SISTEMA SCALARE UGUAGLIANDO LE ENTRATE CORRISPONDENTI DELLE DUE MATRICI ltra scrittura del sistema Σ: si mettono in evidenza le olonne della matrice $(A \vdots B)$

ell'esempio precedente: $C_{A \to \text{MATRICE}}^{1 \to \text{COLONNA}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \; C_A^2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \; C_A^3 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow$

osso scrivere $x_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow$ INFATTI SE ESEGUIAMO LE OPERAZIONI INDICATE

OTTENIAMO

$$\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-x_3\\2x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix}x_1 + x_2 - x_3\\x_2 + 2x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

DA CUI IL SISTEMA SCALARE UGUAGLIANDO LE ENTRATE CORRISPONDENTI NELLE DUE MATRICI UGUALI.

---

uesta scrittura è detta <u>combinazione</u> <u>lineare</u>. DELLE COLONNE DI A)

$\uparrow$

n generale:

$$x_1 C_A^1 + x_2 C_A^2 + \dots + x_n C_A^n = B$$

Cerchiamo una soluzione del sistema lineare Σ, definito come $A \cdot X = B$ con $A \in M_{p\times n}$, $X = M_{n\times 1}$ e $B \in M_{p\times 1}$ lavorando con la matrice $(A \vdots B)$ mediante le cosiddette "<u>operazioni elementari riga</u>" che cambiano la matrice in un'altra ad essa <u>equivalente</u> cioè associata ad un sistema equivalente a quello dato.

ESEMPIO:

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow (A \vdots B) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Si cerca di eliminare la prima variabile nelle ~~[illegible]~~ equazioni del sistema. SUCCESSIVE ALLA PRIMA:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \underset{\sim}{-2R_1 + R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

Si ottiene come scopo finale una matrice a gradini:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} \overset{\text{PIVOT}}{\enclose{circle}{1}} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \underset{\text{PIVOT}}{\enclose{circle}{-1}} & 4 & -4 \end{array}\right)$$

Le prime entrate non nulle della matrice a gradini di ogni riga si dicono "<u>pivot</u>".

DEFINIZIONE:

Il numero dei pivot di una matrice a gradini SI DEFINISCE <u>rango</u> della matrice e quindi ANCHE rango del sistema ad esso associato

Nel nostro esempio il rango è 2. (Il rango è sempre un numero naturale).

Il metodo usato è chiamato metodo in discesa (dell'eliminazione di Gauss)
Ovvero si utilizza il metodo in salita dell'eliminazione di Gauss

Si prende l'ultima riga e si ~~vuole~~ vogliono ottenere tutti 0 sulle colonne del pivot. "AL DI SOPRA" DEI PIVOT.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right) \overset{R_1 = R_1 + R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

Lo scopo finale è ottenere una matrice in forma canonica

DEFINIZIONE:
Chiamo forma canonica della matrice secondo il metodo di eliminazione di Gauss la matrice con tutti zeri ~~[illegible]~~ "sopra" e "sotto" i pivot nelle ~~[illegible]~~ colonne che li contengono e con i pivot tutti = 1

~~[illegible]~~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \Sigma: \begin{cases} x_1 + 3x_3 = -3 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 - 3 \\ x_2 = 4x_3 + 4 \end{cases}$$

RITORNIAMO AL SISTEMA ASSOCIATO:

DUE VARIABILI SONO IN FUNZIONI DI UN'ALTRA.

IL SISTEMA È STATO SEMPLIFICATO AL MASSIMO

NOTA BENE: IL RANGO È UGUALE AL NUMERO DI VARIABILI DIPENDENTI DEL SISTEMA

Se ci sono solo variabili dipendenti la soluzione (SE ESISTE) È UNICA; nel nostro caso sono infinite soluzioni