Sia $V = \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow$ determinare il sistema lineare omogeneo di cui $V$ é spazio delle soluzioni, cioé $\Sigma_0 : A \cdot X = 0$ TALE CHE $V = Sol\, \Sigma_0$ e quindi determinare la matrice $A$, matrice dei coefficienti di tale sistema (esercizio da fare per casa)

Data $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertibile, vogliamo determinare la sua inversa cioé $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

$A$ e $A^{-1}$ hanno rango massimo, $n$

1) metodo: sfrutta la seguente proprietá delle operazioni elementari riga: Se "$e$" é una operazione elementare riga e quindi $e(A) = A'$ con $A' \sim A$

$\Rightarrow e(A) = e(I) \cdot A$

ESEMPIO:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $e =$ scambio di riga $\Rightarrow e(A) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ posto $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \Rightarrow e(I_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Se applico ad $A$ piú operazioni elementari

**PROPOSIZIONE**

avró $e_k(e_{k-1}(e_{k-2} \dots (e_2(e_1(A)))))$ e tale matrice sará data anche da $e_k(e_{k-1}(\dots(e_2(e_1(I)))))\cdot A$

DIMOSTRAZIONE:

Infatti $e_k(e_{k-1} \dots e_2(e_1(I)\cdot A)\dots)$

$= e_k(e_{k-1} \dots (e_2(I)\cdot e_1(I)\cdot A)\dots)$

$= e_k(I)\cdot e_{k-1}(I)\dots e_2(I)\cdot e_1(I)\cdot A$

$= e_k(I)\dots e_2(e_1(I))\dots A)$

$= e_k(e_{k-1}(e_{k-2}(\dots e_2(e_1(I)\dots)))\cdot A$

c.v.d.

Consideriamo ora la matrice $A$ invertibile

$\Rightarrow$ la sua forma canonica è l'identità $I_n$

POICHÈ, ESSENDO $A$ INVERTIBILE, HA RANGO MASSIMO E QUINDI $n$ PIVOTS,

$\Rightarrow$ ciò significa che $e_k(e_{k-1}(e_{k-2}\dots(e_2(e_1(A)\dots)=I$

POICHÈ:

$\Rightarrow e_k(\dots e_2(e_1(A)\dots)= e_k(e_{k-1}(\dots e_2(e_1(I))\cdot A \Rightarrow$

SI HA $e_k(e_{k-1}(\dots(e_2(e_1(I)\dots)\cdot A = I \Rightarrow$

$\Rightarrow e_k(e_{k-1}(\dots(e_2(e_1(I)\dots) = A^{-1}$

Operativamente pongo $M = (A \mid I)$

APPLICO LE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA CHE TRASFORMANO $A$ NELLA SUA FORMA CANONICA $\Rightarrow$

$\Rightarrow e_k(e_{k-1}(\dots e_2(e_1(M)\dots) =$

$= \left(e_k(e_{k-1}(\dots e_2(e_1(A)\dots) \;\middle|\; e_k(e_{k-1}(\dots e_2(e_1(I)\dots)\right) = (I \mid A^{-1})$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A \quad\quad & \quad\quad I \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\end{array} \overset{3R_1-R_2=R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & -1\end{array}\right)$$

$$\overset{R_1-R_2=R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 3 & -1\end{array}\right) \overset{\frac{R_2}{2}=R_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} I \quad\quad & \quad\quad A^{-1} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)\end{array}$$

— — — — — — —

2) metodo (di Cramer): Data $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ invertibile, dobbiamo calcolare la sua matrice "AGGIUNTA" cioè la matrice $A^* = \left( \underbrace{(-1)^{i+j} \, |A_{\hat{ij}}|}_{\text{COMPLEMENTO ALGEBRICO DELL'ELEMENTO } a_{ij} \text{ DI } A} \right)$ $\Rightarrow$ posto $A = (a_{ij})$ $\Rightarrow$ calcolo $A \cdot (A^*)^T = P$

CON $P = (p_{ij})$ $\Rightarrow$ CALCOLO

$$p_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \, |\hat{A}_{\hat{ij}}| = \det A \; ;$$ MENTRE $p_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j$.

[dimostrare che $p_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j$]

$$\Rightarrow A \cdot (A^*)^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & & 0 \\ 0 & \det A & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot I$$

$\Rightarrow$ moltiplicando entrambi i membri per $\frac{1}{\det A}$, ottengo $A \cdot \frac{(A^*)^T}{\det A} = I$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(A^*)^T}{\det A} = A^{-1}}$$

Metodo di Cramer per la risoluzione di un sistema lineare non omogeneo di n equazioni, in n incognite e di rango n. [questi sistemi si chiamano SISTEMI DI CRAMER]

Un tale sistema ha $\overset{\text{ALMENO UNA}}{\text{soluzione}}$ (da vedere) e ne ha 1;

INFATTI:

$$\infty^{\text{* variabili} - rg\,\Sigma} = \infty^{n-n} = \infty^{0} = 1$$

ho $\Sigma := A \cdot X = B$ con $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times 1}$

$\Rightarrow$ Ricordo che $A \cdot X = B$ si può anche mettere SOTTO FORMA DI $\overset{\text{DI COLONNE DI A}}{\text{somma}}$:

$$x_1 C_A^1 + x_2 C_A^2 + \dots + x_n C_A^n = B$$

$\Rightarrow$ considero la matrice

$$M = \left( \begin{array}{ccccccc} C_A^1 & C_A^2 \cdots & C_A^{i-1} & \underset{\uparrow}{B} & C_A^{i+1} \cdots & C_A^n \\ & & & i\text{-ESIMA COLONNA} & & \end{array} \right)$$

$$= \left( C_A^1 \; C_A^2 \cdots C_A^{i-1} \quad x_1 C_A^1 + x_2 C_A^2 + \dots + x_n C_A^n \quad C_A^{i+1} \cdots C_A^n \right)$$

$$\Rightarrow \det M = \det\left( C_A^1 \cdots C_A^{i+1} \underset{\overset{\uparrow}{i}}{x_1 C_A^1} C_A^{i+1} \cdots C_A^n \right) + \det\left( C_A^1 \cdots \underset{\overset{\uparrow}{i}}{x_2 C_A^2} \cdots C_A^n \right) + \dots$$

$$\dots + \dots + \det\left( C_A^1 \cdots \underset{\overset{\uparrow}{i}}{x_n C_A^n} \cdots C_A^n \right)$$

$$= x_1 \underbrace{\det\left( C_A^1 \cdots C_A^1 \cdots C_A^n \right)}_{=0} + \dots + x_i \det\left( C_A^1 \cdots C_A^i \cdots C_A^n \right) + \dots$$

$$\dots + x_n \underbrace{\det\left( C_A^1 \cdots C_A^n \cdots C_A^n \right)}_{=0} = x_i \det A$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{\det\left( C_A^1 \cdots \overset{i}{B} \cdots C_A^n \right)}{\det A}$$

Esempio:

$$\Sigma \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{+4}{+3} \qquad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{\det A} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sol}\, \Sigma = \left\{ \left( \frac{4}{3} ; -\frac{1}{3} \right) \right\}$$

---

ATTENZIONE:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

PUÒ ESSERE RISOLTO COME UN SISTEMA DI CRAMER CON DUE VARIABILI IN DUE EQUAZIONI

---

Se $\Sigma : AX = B \Rightarrow \Sigma$ ha soluzione $\Leftrightarrow rgA = rg(A \vdots B)$

Teorema di Rouché - Capelli $\Uparrow$ con $A \in M_{p \times m}$

$X \in M_{m \times 1}$

$B \in M_{p \times 1}$

DIMOSTRAZIONE:

$$\Rightarrow \alpha_1 C_A^1 + \alpha_2 C_A^2 + \dots + \alpha_m C_A^m = B$$

$\Rightarrow B$ è combinazione lineare delle colonne di $A$

$\Rightarrow$ rango $A$ = rango $(A \vdots B)$

"$\Leftarrow$" a ritroso NELLO STESSO MODO.