$F((v, \alpha v, w)) = \ldots$

$: V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare se $F((v, \alpha v, w)) = \ldots$ ed $F((\alpha v, w)) = \alpha F((v, w))$

ANALOGAMENTE PER LA SECONDA COMPONENTE,

Data in V una base $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\} \Rightarrow$ associamo a F una matrice $[F]_{B_V} = \begin{pmatrix} F(v_1, v_1) & \cdots & F(v_1, v_n) \\ \vdots & & \\ F(v_n, v_1) & \cdots & F(v_n, v_n) \end{pmatrix}$

nuova base $B_V^1 = \{w_1, \ldots w_n\} \Rightarrow$ nuova matrice $[F]_{B_V^1}$: qual'è la relazione fra le due matrici?

Suppongo che $v, w \in V \Rightarrow$ se $[v]_{B_V} = X$ e $[w]_{B_V} = Y$

$\Rightarrow F(v, w) = X^T [F]_{B_V} Y$ nella base $B_V^1 \Rightarrow [v]_{B_V^1} = X_1$ e $[w]_{B_V^1} = Y_1$

$\Rightarrow$ Data la nuova matrice $[F]_{B_V^1}$ si ha sempre $F((v, w)) = X_1^T [F]_{B_V^1} Y_1$

Se S è la matrice del cambiamento di base $\Rightarrow X = SX_1$ e $Y = SY_1$

$\Rightarrow F((v, w)) = X^T [F]_{B_V} Y = (SX_1)^T [F]_{B_V} (SY_1) = \boxed{X_1^T S^T [F]_{B_V} S Y_1 = X_1^T [F]_{B_V^1} Y_1 \quad \forall X_1, Y_1 \in \mathbb{R}^n}$

$\Rightarrow [F]_{B_V^1} = S^T [F]_{B_V} S$

Definizione

Due matrici quadrate A, B si dicono congruenti se esiste $S \in M_{n \times n}$, invertibile, tale che $B = S^T A S$. Tale relazione è una relazione di equivalenza

Osservazione: matrici associate alla stessa forma bilineare in basi diverse sono congruenti

Analizziamo alcuni possibili invarianti per congruenza

il determinante

Date due matrici congruenti $A, B \to B = S^T A S \Rightarrow |B| = |S^T A S| \to |B| = |S^T||A||S| = |S||A||S| = |S|^2 |A|$

Il det. non è un invariante

Tutti i determinanti DI MATRICI in una classe di congruenza hanno lo stesso segno ~~o sono nulli~~

Se $|A| = 0 \to |B| = 0$

il rango

(Ricordo il lemma: se S è invertibile $\to rg(AS) = rg(SA) = rg A$)

Proposizione: il rango è invariante per congruenza

A, B sono congruenti se esiste S invertibile $| B = S^T A S \Rightarrow rg(B) = rg(S^T A S) = rg(S^T A) = rg(A)$

Ad ogni forma bilineare è associata una classe di matrici congruenti con lo stesso rango; tale rango è definito rango della forma bilineare.

Definizione

Se il rango è massimo la forma bilineare è detta non degenere

Definizione

1) Una forma bilineare $F: V \times V \to K$ è detta simmetrica se $F((v, w)) = F((w, v)) \forall v, w \in V$

~~[illegible]~~ la matrice associata in una base B_V ad una forma bilineare simmetrica, $[F]_{B_V}$ è simmetrica

2) $F: V \times V \to K$ è detta antisimmetrica se $F((v, w)) = -F((w, v)) \; \forall w, v \in V$

le matrici associate sono antisimmetriche $(a_{ij} = -a_{ji} \; \forall i, j)$ Es. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

3) $F: V \times V \to K$ è detta alternante se $F((v, v)) = 0 \; \forall v \in V$

Osservazione:

se K è $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ $\to$ F è antisimmetrica $\Leftrightarrow$ F è alternante

<u>Definizione</u> Sia $F: V \times V \to \mathbb{K}$ simmetrica

due vettori $u, v \in V$ si dicono <u>coniugati</u> (o F-ortogonali) se $F((v,u)) = F((u,v)) = 0$

Osservazione: ogni $v \in V$ é coniugato al vettore nullo.

ESEMPIO: Cerchiamo i vettori coniugati ad un dato vettore $v \neq 0$ rispetto alla forma $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1y_2 + x_2y_1$

$F\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = y_1x_2 + y_2x_1 \Rightarrow$ é simmetrica

Prendo $V = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \to W = \langle\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle\rangle$

cerco i vettori W di coordinate $w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tale che $F(w,v) = 0 \Rightarrow F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \boxed{-2x_1 + 3x_2 = 0}$ formano questa retta DI $\mathbb{R}^2$

Lo spazio dei vettori coniugati a v si indica con $v^\perp$

Dato un sottospazio $W \subseteq V$ posso cercare i vettori di V coniugati a tutti i vettori di W

se $B_W = \{w_1, \dots, w_\ell\}$ e il vettore $v \in V$ é coniugato a tali vettori di base

CIOE' $\Rightarrow F((v, w_r)) = 0 \quad \forall r = 1, \dots, \ell \to$ se considero $w \in W \to w = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i w_i \to F((v,w)) = F((v, \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i w_i)) \underset{\text{PER LA BILINEARITA' DI F}}{=}$

$= \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i F((v, w_i)) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \cdot 0 = 0$

L'insieme dei vettori coniugati a W si indica con $W^\perp$

Osservazione: $v^\perp = \langle\langle v \rangle\rangle^\perp$

<u>Definizione</u> Data $F: V \times V \to \mathbb{R}$ simmetrica

Un vettore $v \in V$, $v \neq 0$, é detto isotropo se $F((v,v)) = 0$

<u>Definizione</u>

1) Se una base é costituita da vettori ~~ortogonali~~ F-coniugati si definisce <u>F-ortogonale</u>

2) Si definisce <u>ortonormale</u> una base F-ortogonale formata da vettori V_i, $i = 1, \dots n$ tali che $F((v_i, v_i)) = 1$