MERCOLEDÌ 26/03/14

DATA UN'APPLICAZIONE $F: V \times V \to \mathbb{R}$ (F SIMMETRICA) V SPAZIO VETTORIALE REALE n-DIMENSIONALE $\Rightarrow$ SE HO UNA BASE $\mathcal{B}_V$ DI V, F-ORTOGONALE $\{v_1, \dots, v_n\}$

$$\Rightarrow [F]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} F((v_1, v_1)) & F((v_1, v_2)) & \dots & F((v_1, v_n)) \\ \vdots & & & \vdots \\ F((v_n, v_1)) & F((v_n, v_2)) & \dots & F((v_n, v_n)) \end{pmatrix}_{n \times n} =$$

TUTTE LE ENTRATE AL DI FUORI DELLA DIAGONALE SONO NULLE

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

HO UNA MATRICE DIAGONALE

F DEVE ESSERE BILINEARE SIMMETRICA PER AVERE LA MATRICE ASSOCIATA $[F]_{\mathcal{B}_V}$ DIAGONALE

⌈DATA UNA FORMA BILINEARE SIMMETRICA DIMOSTREREMO CHE RIESCO SEMPRE A DETERMINARE UNA BASE ORTOGONALE⌋

⌈OGNI MATRICE SIMMETRICA È CONGRUENTE AD UNA MATRICE DIAGONALE.⌋

PROPOSIZIONE: SIA $F: V \times V \to K$ UNA FORMA BILINEARE SIMMETRICA $\Rightarrow$ SE U È SOTTOSPAZIO DI V PRIVO DI VETTORI ISOTROPI $\Rightarrow$ SUPPOSTA LA $\dim U = k$ $\Rightarrow U^\perp$ È UN SOTTOSPAZIO DI V DI DIMENSIONE $n-k$ E QUINDI TALE CHE

$$U \oplus \underbrace{U^\perp}_{\text{COMPLEMENTO ORTOGONALE DI } U} = V$$

(SE NON ABBIAMO IN V VETTORI ISOTROPI $\Rightarrow$ LA PROPOSIZIONE VALE $\forall\, U < V$)

DIMOSTRAZIONE: SIA $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_k\}$ BASE DI U $\Rightarrow$ CERCO I VETTORI DI V, v, TALI CHE $F((v, u)) = 0 \ \forall u \in U$ E QUINDI CERCO I VETTORI $v \in V$ TALI CHE $F((v, u_j)) = 0 \ \forall j = 1, \dots, k$

$$\Rightarrow \Sigma \begin{cases} F((v, u_1)) = 0 \\ F((v, u_2)) = 0 \\ \vdots \\ F((v, u_k)) = 0 \end{cases}$$

È UN SISTEMA LINEARE DI k EQUAZIONI IN n INCOGNITE.

INFATTI SE $v = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i$ CON $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_m\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} F\left(\left(\sum_{i=1}^{m} x_i v_i , u_1\right)\right) = 0 \\ \vdots \end{cases} \xRightarrow[\text{LINEARITÀ}]{\text{PER}} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i F((v_i , u_1)) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} x_i F((v_i , u_k)) = 0 \end{cases}$$

DETERMINATE DALLE COORDINATE $x_1, \dots, x_m$ DI v

- QUESTO SISTEMA HA RANGO K

IL RANGO DEL SISTEMA DETERMINATO È $rg = K$ CIOÈ LE K EQUAZIONI DEL SISTEMA SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow$ PER DIMOSTRARLO CONSIDERO $\alpha_1 F((v, u_1)) + \alpha_2 F((v, v_2)) + \dots + \alpha_k F((v, u_k)) = 0$ CON v GENERICO IN V

PRENDO $\tilde{v} = \sum_{j=1}^{K} \alpha_j u_j \in U$

SOSTITUENDO A QUANTO FATTO PRIMA:

$$0 = \sum_{j=1}^{K} \alpha_j F((\tilde{v}, u_j)) = \sum_{j=1}^{K} \alpha_j F\left(\left(\sum_{j=1}^{K} \alpha_j u_j , u_j\right)\right) = F\left(\sum_{j=1}^{K} \alpha_j u_j , \sum_{j=1}^{K} \alpha_j u_j\right)$$

PER LA LINEARITÀ DI $F \Rightarrow \sum_{j=1}^{K} \alpha_j u_j$ È ISOTROPO IN $U \Rightarrow$

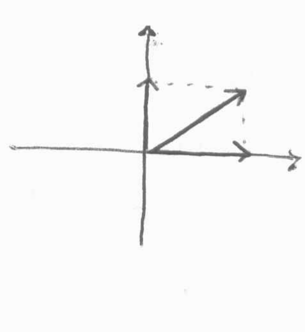
$\Rightarrow \sum_{j=1}^{K} \alpha_j u_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j = 1, \dots, K$

QUINDI IL NOSTRO SISTEMA INIZIALE È DI $rg = K$

$\Rightarrow \dim Sol \Sigma = m - K$ e $Sol \Sigma = U^{\perp} \Rightarrow \dim U^{\perp} = m - K$

e $U \cap U^{\perp} = \{0\} \Rightarrow \boxed{U \oplus U^{\perp} = V}$

QUESTO RIFLETTE IN FISICA LA SCOMPOSIZIONE DI UN QUALSIASI VETTORE NELLE SUE COMPONENTI ORTOGONALI



SE $v \in U + U^{\perp} \Rightarrow v = u + w$

CON $u \in U$ e $w \in U^{\perp}$

IL VETTORE u e w SONO LE PROIEZIONI ORTOGONALI DEL VETTORE v

u SU U e w SU $U^{\perp}$

PROPOSIZIONE: SIA $F: V \times V \to K$ FORMA BILINEARE DEGENERE

$\Rightarrow F$ HA VETTORI ISOTROPI

DIMOSTRAZIONE: DATA $\mathcal{B}_V$ BASE DI $V \Rightarrow [F]_{\mathcal{B}_V}$ NON HA RANGO MASSIMO $\Rightarrow$ SUPPONIAMO CHE LA K-ESIMA RIGA ~~DI~~ DELLA MATRICE SIA COMBINAZIONE LINEARE DELLE ALTRE

$R_K = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j R_j$ (UNO DEI COEFFICIENTI PUÒ ESSERE NULLO) O PIÙ

FISSATA LA j-ESIMA COLONNA DELLA MATRICE $\Rightarrow F((v_K, v_j)) =$

$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F((v_i, v_j)) \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F((v_i, v_j)) - F((v_K, v_j)) = 0$

PER LA BILINEARITÀ DI $F((\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i - v_K, v_j)) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$

$\Rightarrow$ HO DETERMINATO UN VETTORE $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i - v_K$ F-ORTOGONALE AD OGNI VETTORE DI BASE DI V

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i - v_K$ È F-ORTOGONALE AD OGNI VETTORE DI V: IN PARTICOLARE ANCHE A SE STESSO $\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i - v_K$ È ISOTROPO

cvd

esempio:

$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ FORMA BILINEARE <u>NON DEGENERE</u>

$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1 y_2 + x_2 y_1$ È NON DEGENERE?

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \mapsto 0$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \mapsto 1$

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \mapsto 1$

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \mapsto 0$

$\Rightarrow [F]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} F((e_1, e_1)) & F((e_1, e_2)) \\ F((e_2, e_1)) & F((e_2, e_2)) \end{pmatrix}$

PROPOSIZIONE: $F : V \times V \to K$ BILINEARE SIMMETRICA, NON NULLA,

$\Rightarrow \exists$ ALMENO UN VETTORE $v \in V$ NON ISOTROPO

DIMOSTRAZIONE: POICHÉ K È NON NULLA $\Rightarrow \exists\ w_1, w_2 \in V$ TALI CHE $F((w_1, w_2)) \neq 0$

CERCO $F((w_1+w_2, w_1+w_2)) = F((w_1, w_1)) + F((w_1, w_2)) + F((w_2, w_1)) + F((w_2, w_2)) = F((w_1, w_1)) + 2F((w_1, w_2)) + F((w_2, w_2))$

$$0 \neq F((w_1, w_2)) = \frac{F((w_1+w_2, w_1+w_2)) - F((w_1, w_1)) - F((w_2, w_2))}{2}$$

$\Rightarrow$ O w_1 O w_2 O w_1+w_2 NON ~~DEVE~~ ESSERE ISOTROPO c.v.d.

NON SI PUÒ DIVIDERE PER DUE "$\frac{1}{2}$" IN CAMPI DOVE "2" È L'ELEMENTO NEUTRO (~~[illegible]~~).

- LA DIMOSTRAZIONE HA SENSO IN CAMPI K CON CARATTERISTICA DIVERSA DA DUE "2"

· LAVORIAMO CON FORME BILINEARI IN $\mathbb{R}$

SIA $F : V \times V \to \mathbb{R}$ (SIMMETRICA) $\Rightarrow \exists\ \mathcal{B}_V$ FORMATA DA VETTORI F-ORTOGONALI

DIMOSTRAZIONE: PER INDUZIONE SULLA DIMENSIONE DI V

1) PER $\dim V = 1$ VERO

2) SI SUPPONE VERIFICATA PER $\dim V = k$ E LO SI DIMOSTRA PER $\dim V = k+1$

IN V CON DIMENSIONE $\dim V = k+1$, $\exists$ UN VETTORE $v \in V$ NON ISOTROPO $\Rightarrow$ CONSIDERO $\langle\langle v \rangle\rangle = U \Rightarrow \exists\ U^\perp$ TALE CHE $U \oplus U^\perp = V$ E $\dim U^\perp = k$

PER IPOTESI INDUTTIVA ESISTE UNA BASE DI $U^\perp$, $\mathcal{B}_{U^\perp} = \{u_1, \dots, u_k\}$ FORMATA DA VETTORI F-ORTOGONALI $\Rightarrow$ SE CONSIDERO $\{v, u_1, \dots, u_k\}$,

$\Rightarrow$ HO UNA BASE F-ORTOGONALE DI V.