Definizione: Si dice BASE di uno spazio vettoriale V l'insieme B_V costituito dal minimo NUMERO di generatori di V linearmente indipendenti.

Definizione: Se gli elementi di B_V sono in numero finito cioè la cardinalità di B_V è finita $\Rightarrow$ V è spazio vettoriale di dimensione finita

Se $\# B_V$ è infinita $\Rightarrow$ V è uno spazio vettoriale di dimensione infinita.

Esempi di basi: $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ dico che $B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $\mathbb{R}^2$

Dimostrazione. (1) Sono linearmente indipendenti:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Se } \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \text{ è vera.}$$

Dimostriamo ora che posto $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ gli unici scalari possibili sono $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata è $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{R_1 - R_2 = R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Sol\,\Sigma_0$ ha ∞^{n-r} soluzioni $\infty^{2-2} = \infty^0$ soluzioni

$\Rightarrow 1!$ soluzione: quella nulla $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

(2) Generano $\mathbb{R}^2$? Cioè preso $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \mid v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$? $\Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x - \alpha_2 \\ x - \alpha_2 + 2\alpha_2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2x - y \\ \alpha_2 = y - x \end{cases}$$

$\Rightarrow B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $\mathbb{R}^2$

Proposizione: $\exists$ infinite basi per uno spazio vettoriale V ed hanno tutte la stessa cardinalità.

Dimostrazione: Siano B_1 e B_2 basi di uno stesso spazio vettoriale V

Poniamo $B_1 = \{v_1, \dots, v_h\}$ e $B_2 = \{w_1, \dots, w_k\}$

Vogliamo dimostrare che $h = k \Rightarrow$ per assurdo supponiamo che $h \neq k \Rightarrow$ sia $h > k \Rightarrow$ Considero B_2 come base dello spazio $\Rightarrow k$ è il massimo numero di elementi linearmente indipendenti che generano lo spazio, per definizione $\Rightarrow$ i vettori $v_1, \dots, v_h$ NON possono essere tutti linearmente indipendenti, SE $h>k$.
se CONSIDERIAMO B_1 come base $\Rightarrow$ non è possibile che $h > k$

Con lo stesso ragionamento, scambiando i ruoli tra B_1 e B_2 si dimostra che k non può essere $> h \Rightarrow h = k$

c.v.d.

Definizione: Chiamiamo DIMENSIONE di uno spazio vettoriale V, la cardinalità di una sua base qualunque.

Lavoreremo in spazi vettoriali di dimensione finita.

$\mathbb{R}_2[x]$ è uno spazio vettoriale DI DIMENSIONE 3:

$\mathbb{R}_2[x] = \{a_2x^2 + a_1 + a_0 = p(x) \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}[x]$

$\mathbb{R}_2[x]$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}_2[x] \leqslant \mathbb{R}[x]$

$\leqslant \rightarrow$ significa "è sottospazio vettoriale"

Considero $v_1 = 1 \quad v_2 = x \quad v_3 = x^2 \quad \in \mathbb{R}_2[x]$

$\Rightarrow$ dimostro che $B_{\mathbb{R}_2[x]} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è base di $\mathbb{R}_2[x]$

(1) Sono linearmente indipendenti

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ($\Leftarrow$ è ovviamente vera)

"$\Rightarrow$" $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0x^2 + 0x + 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ PERCHÉ DUE POLINOMI SONO UGUALI $\Leftrightarrow$ HANNO LO STESSO GRADO E I COEFFICIENTI DEI MONOMI DELLO STESSO GRADO SONO =

$\Rightarrow$ sono linearmente indipendenti

(2) Sono generatori di $\mathbb{R}_2[x]$ ogni $p(x)$ si può scrivere come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3

$\Rightarrow p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = \alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$

$\Rightarrow$ basta prendere $\alpha_3 = a_2,\ \alpha_2 = a_1,\ \alpha_1 = a_0$

OK

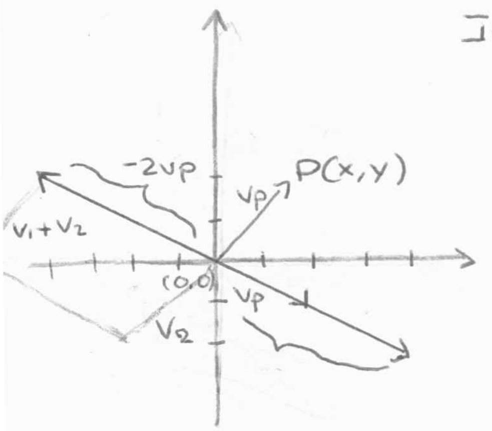
Lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ ha dimensione finita pari a $p \times n$.

<u>Esempio</u>: in $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ l'insieme $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base. (ESERCIZIO)

In $\mathbb{R}^n$ una base di vettori è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$: è è detta BASE CANONICA di $\mathbb{R}^n$ e si indica $C_{\mathbb{R}^n}$.

Vogliamo rappresentare <u>geometricamente</u> i vettori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$.

Consideriamo $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$.
Nel piano definisco il <u>vettore geometrico</u> in questo modo: preso l'elemento $(x,y) \in \mathbb{R}^2$



Identifico (x,y) con il segmento orientato v_P con <u>primo</u> estremo <u>sempre</u> nell'origine e secondo estremo nel punto $P(x,y)$.
v_P è detto <u>vettore geometrico</u>.

$v_P = (2,-1)$ Ho le operazioni già definite in $\mathbb{R}^2$: ad esempio $2(2,-1) = (4,-2)$ OPPURE $(2,-1)+(3,4)=(5,3)$

La misura di v_P si definisce NORMA o MODULO di v_P: $\|v_P\| = \sqrt{x^2+y^2}$

LE OPERAZIONI DEFINITE SU $\mathbb{R}^2$, DEFINISCONO LE OPERAZIONI FRA I VETTORI GEOMETRICI: <u>MULTIPLI</u> DI VETTORI GEOMETRICI E LA <u>SOMMA</u> DI VETTORI GEOMETRICI, RAPPRESENTATA DALLA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA; CON TALI OPERAZIONI L'INSIEME DEI VETTORI GEOMETRICI DI $\mathbb{R}^2$ È UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE DUE.

PER ESERCIZIO SI DEFINISCA LO SPAZIO VETTORIALE DEI VETTORI GEOMETRICI DI $\mathbb{R}^3$.