31/03/2014

Sia $F: V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica

DEF: 1) "F" si dice DEFINITA POSITIVA se $F((v,v)) > 0 \quad \forall v \neq 0$

2) "F" si dice DEFINITA NEGATIVA se $F((v,v)) < 0 \quad \forall v \neq 0$

3) "F" si dice (SEMIDEFINITA) POSITIVA se $F((v,v)) \geq 0 \quad \forall v \in V$

4) "F" si dice (SEMIDEFINITA) NEGATIVA se $F((v,v)) \leq 0 \quad \forall v \in V$

5) "F" si dice INDEFINITA per tutti gli altri casi

ESEMPIO

$$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longrightarrow x_1 y_1 + y_2 x_2 \quad \text{PRODOTTO SCALARE}$$

è SIMMETRICA (o $F((X,Y)) = F((Y,X))$)

$$F((X,Y)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$
$$F((Y,X)) = y_1 x_1 + y_2 x_2 \Rightarrow F((X,Y)) = F((Y,X)) \quad \text{PER LE PROPRIETÀ IN } \mathbb{R}$$

OPPURE CONSIDERIAMO LA MATRICE ASSOCIATA AD F IN UNA BASE, AD ESEMPIO $\mathcal{E}$

$$[F]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} F\left(\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\right) & F\left(\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right) \\ F\left(\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\right) & F\left(\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DALLA MATRICE SI VEDE CHE:
LA BASE CANONICA PER QUESTA FORMA BILINEARE È ~~ORTONORMALE~~ UNA BASE ORTONORMALE

$$F((v,v)) = F((\overset{[v]_{\mathcal{E}}}{\overset{\shortparallel}{X}}, \overset{[v]_{\mathcal{E}}}{\overset{\shortparallel}{X}})) = F\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)\right) = x_1 x_1 + x_2 x_2 = x_1^2 + x_2^2 > 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

"F" è DEFINITA POSITIVA

ato V spazio vettoriale n-dimensionale su un campo K, definiamo
ORMA QUADRATICA un'applicazione $Q: V \longrightarrow K$ /
$Q(\alpha v) = \alpha^2 Q(v) \quad \forall v \in V$ e $\alpha \in K$
l'applicazione $F: V \times V \longrightarrow K$ / $F((v,w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$
F è forma bilineare simmetrica

ESEMPIO:

$Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 x_2$ è forma quadratica!

PRIMA PROPRIETÀ: $Q(\alpha v) = Q(\alpha(x_1, x_2)) = Q(\alpha x_1, \alpha x_2) = \alpha x_1 \alpha x_2 = \alpha^2 x_1 x_2 = \alpha^2 Q(x_1, x_2)$
SECONDA PROPRIETÀ:
definisco $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ / $F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = Q\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

$= (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - (x_1 x_2) - (y_1 y_2) = \cancel{x_1 x_2} + y_1 x_2 + \cancel{y_1 y_2} + x_1 y_2 - \cancel{x_1 x_2} - \cancel{y_1 y_2} =$

$= x_1 y_2 + x_2 y_1$ (FORMA BILINEARE SIMMETRICA)

Q è una FORMA QUADRATICA

A partire da $Q: V \longrightarrow K$, forma quadratica, voglio determinare una forma bilineare SIMMETRICA $F_Q: V \times V \longrightarrow K$ / $F_Q((v,v)) = Q(v) \quad \forall v \in V$

Considero $F(v,w)$ definita da $Q \overset{\text{(TRAMITE LA PROPRIETÀ 2)}}{\Longrightarrow} F((v,v)) = Q(2v) - Q(v) - Q(v) =$
$= 4Q(v) - 2Q(v) = 2Q(v)$

F_Q può quindi essere così definita: $F_Q(v,w) = \dfrac{F((v,w))}{2} =$

$$= \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}$$

QUESTO SOLO IN CAMPI CON CARATTERISTICA $\neq 2$

Questa forma bilineare è chiamata FORMA POLARE di Q

La FORMA POLARE di una forma quadratica è UNICA (da dimostrare DIM per assurdo)

A partire da $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica, si può definire $Q: V \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, Q(v) = F((v,v)) \quad \forall v \in V$

(dimostrare che $Q(v)$ è una forma QUADRATICA)

$Q(v)$ è ~~...~~ la FORMA QUADRATICA che ha F come polare

Se lavoriamo in un campo K con caratteristica $\neq 2$ esiste una ~~corrispondenza~~ ~~cor~~ corrispondenza biunivoca: $\{Q: V \to K\} \longrightarrow \{F: V \times V \to K\}$

$$Q \longleftrightarrow F_Q$$

$Q :=$ forma quadratica, $F :=$ forma bilineare simmetrica

Infinite forme bilineari possono definire la stessa forma quadratica, ma tra tutte, ~~...~~ ce n'è solo UNA simmetrica $/ \; F((v,v)) = Q(v) \quad \forall v \in V$

ESEMPIO

sia $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

(dimostrare che è bilineare)

$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longrightarrow x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_2 y_2$ non è simmetrica INFATTI:

$[F]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ~~...~~ LA MATRICE NON È SIMMETRICA $\Rightarrow$ "F" NON È SIMMETRICA

Parto da F e costruisco $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, F((v,v)) = Q(v)$

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow F((v,v)) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$

è forma quadratica?

1) $Q\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha^2 x_1^2 + \alpha x_1 \alpha x_2 + \alpha^2 x_2^2 = \alpha^2 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = \alpha^2 Q(v)$

2) Costruisco G (forma bilineare simmetrica): $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \,/$

$G((v,w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; w \begin{pmatrix} y_1 \\ y \end{pmatrix}$

$$G\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) = Q\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) - Q\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = 2x_1y_1+y_1x_2+x_1y_2+2x_2y_2$$

G è una forma bilineare poiché la sua forma analitica è FORMATA da polinomi OMOGENEI di secondo grado con variabili x e y ed è presente il prodotto tra le variabili, è simmetrica poiché la matrice associata a G in una base qualunque è simmetrica.

Q è quindi una forma quadratica.

Cerco la forma polare di Q, cioè $F_Q: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ /

$$F_Q((v,w)) = \frac{Q(v+w)-Q(v)-Q(w)}{2}$$

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y\end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1y_1 + \frac{x_1y_2}{2} + \frac{x_2y_1}{2} + x_2y_2$$

$$F((X,Y)) \neq F_Q((X,Y))$$

per dimostrarlo basta prendere una coppia di vettori numerici, ad esempio e_1 e e_2, applicarvi le trasformazioni F e F_Q e vedere che il risultato è diverso.

Considero $F: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fissata una base B in $\mathbb{R}^n$, $[F]_B$ è tale che $F((v,w)) = [v]_B^T\,[F]_B\,[w]_B$, poiché $F((v,v)) = Q(v)$

$$Q(v) = [v]_B^T\,[F]_B\,[v]_B$$

$[F]_B$ è quindi la matrice associata a $Q(v)$ nella base B di $\mathbb{R}^n$ ed è anche la matrice, associata alla stessa base, della sua forma polare.

ESEMPIO:

$$Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$ fisso in $\mathbb{R}^2$ la base canonica $\mathcal{C}$

cerco $[Q]_{\mathcal{C}}$

I) studio $F_Q: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F_Q((v,w)) = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2} =$$

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1+y_1)^2 + (x_1+y_1)(x_2+y_2) + (x_2+y_2)^2 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 - y_1^2 - y_1y_2 - y_2^2\right] =$$

$$= x_1y_1 + \frac{y_1x_2}{2} + \frac{y_2x_1}{2} + x_2y_2$$

$$[F_Q]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [Q]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Cerco $[Q]_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}} =$

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sulla diagonale vanno, in ordine, i coefficienti dei termini di secondo grado al di fuori della diagonale vanno i coefficienti dei termini misti divisi per ~~il~~ ~~numero~~ 2

ESEMPIO

$$Q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2x_3 - 2x_3^2$$

$$[Q]_{\mathcal{C}} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrici associate alla stessa forma quadratica in basi diverse sono congruenti.