Teorema di Ortogonalizzazione

08\05\13

In R^n consideriamo k vettori lin. indip. $k \leq n$, $v_1, \dots, v_k \Rightarrow \exists$ k vettori $u_1, \dots, u_k$ ortogonali 2 a 2 tali che $\langle\langle v_1 \rangle\rangle = \langle\langle u_1 \rangle\rangle$, $\langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle = \langle\langle u_1, u_2 \rangle\rangle$, ... $\langle\langle v_1, \dots, v_l \rangle\rangle = \langle\langle u_1, \dots, u_l \rangle\rangle \ \forall l = 1, \dots, k$

Inoltre tali vettori sono unici a meno di una costante moltiplicativa

Dim.

per induzione su k

1. per $k = 1$ posso $u_1 = v_1$ la verifica è ovvia.

2. supponiamo vera la proposizione fino ad l e dim. per $l+1$

abbiamo l vettori $u_1, \dots, u_l$ ortogonali t.c. $\langle\langle v_1, \dots, v_h \rangle\rangle = \langle\langle u_1, \dots, u_h \rangle\rangle \ \forall h = 1, \dots, l$

Cerchiamo u_{l+1} considero $U_l = \langle\langle v_1, \dots, v_l \rangle\rangle = \langle\langle u_1, \dots, u_l \rangle\rangle$

considerando $R^n = U_l \oplus U_l^\perp$ scompongo v_{l+1} nella somma $g + h$

con $g \in U_l$ e $h \in U_l^\perp \Rightarrow v_{l+1} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_l u_l + h$

posso prendere $u_{l+1} := h = v_{l+1} - \sum_{j=1}^{l} \alpha_j u_j$, h è ortogonale a $u_j \ \forall j = 1, \dots, l$

e $\langle\langle v_1, \dots, v_{l+1} \rangle\rangle = \langle\langle u_1, \dots, u_{l+1} \rangle\rangle$ IN QUANTO, PER COME SONO PRESI v_{l+1} e u_{l+1} SI HA:

$v_{l+1} \in \langle\langle u_1, \dots, u_{l+1} \rangle\rangle$ e analogamente $u_{l+1} \in \langle\langle v_1, \dots, v_{l+1} \rangle\rangle$

I vettori trovati sono unici A MENO DI UN FATTORE, COSTANTE.

Esempio:

In R^3 prendiamo $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Cerchiamo una base $B\perp$ di R^3, $B\perp = \{u_1, u_2, u_3\}$, DATA $\{v_1, v_2, v_3\} = B$

Poniamo $u_1 = v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$$v_2 = a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + u_2 \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Imponiamo $u_2 \cdot v_1 = 0$ $\qquad \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$

quindi $2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

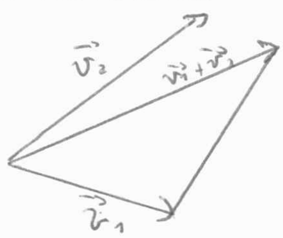
Cerchiamo $u_3 \Rightarrow v_3 = b_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + u_3 \Rightarrow u_3 = V_3 - b_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - b_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Impongo $\begin{cases} u_3 \cdot u_1 = 0 \\ u_3 \cdot u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{v_3 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Big\backslash \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2 = -\dfrac{1}{2} \\ b_2 = \dfrac{v_3 \cdot u_2}{\|u_2\|^2} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \Big\backslash \left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\|^2 = 0 \end{cases}$

Coeff. Fourier (ESSENDO $u_1 \perp u_2$!)

$$u_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\backslash 2\\-1\backslash 2\\-1\end{pmatrix}$$

Disuguaglianza triangolare



In un triangolo ogni lato è $\leq$ della somma degli altri 2

[redacted]

$$\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$
$$\| \qquad \sqrt{(v_1+v_2)\cdot(v_1+v_2)}$$

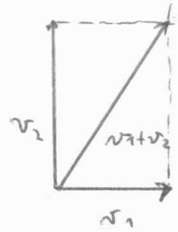
$$\|v_1 + v_2\|^2 = (v_1 + v_2)\cdot(v_1+v_2) =$$
$$= v_1 \cdot v_1 + v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2$$
$$= \|v_1\|^2 + 2 v_1 \cdot v_2 + \|v_2\|^2$$
$$\leq \text{di } \|v_1\|^2 + 2\|v_1\|\,\|v_2\| + \|v_2\|^2 =$$
$$= (\|v_1\| + \|v_2\|)^2$$

Estraendo le radici quadrate abbiamo la Tesi

COROLLARIO

$\underbrace{\text{Se } v_1 \perp v_2}_{\Downarrow}$

$v_1 \cdot v_2 = 0$



$\Rightarrow \underbrace{\|v_1+v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2}_{\text{Teorema di Pitagora}}$

Dati k vettori generici in $\mathbb{R}^n$ posso ~~scrivere~~ costruire la matrice dei loro prodotti scalari

Cioè se $v_1, \dots, v_k$ sono i vettori $\Rightarrow$ ho la matrice

$$\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \dots & v_1 \cdot v_k \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \dots & v_2 \cdot v_k \\ \vdots & & & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & v_k \cdot v_2 & \dots & v_k \cdot v_k \end{pmatrix}$$

Tale matrice quadrata simmetrica è detta <u>Matrice di Gram</u> <u>dei vettori $v_1, \dots, v_k$</u>

ed il suo determinante è detto Gramiano (GRAMIANO) dei vettori $v_1, \dots, v_k$.

Il Gramiano dei vettori $v_1, \dots, v_k$ $\left(G(v_1, \dots, v_k)\right)$ è $\neq 0 \iff$ i vettori sono linearmente indipendenti.

Si dimostra che se ortogonalizzo i vettori $v_1, \dots, v_k$, determinando i vettori $w_1, \dots, w_k \Rightarrow$ la Matrice di Gram associata a tali vettori è diagonale e pari a

$$\begin{pmatrix} \|w_1\|^2 & & 0 \\ & \|w_2\|^2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \|w_k\|^2 \end{pmatrix}$$

e dunque $G(w_1, \dots, w_k) = \|w_1\|^2 \cdot \|w_2\|^2 \cdot \dots \cdot \|w_k\|^2$

e si dimostra che $G(w_1, \dots, w_k) = G(v_1, \dots, v_k) = \|w_1\|^2 \cdot \dots \cdot \|w_k\|^2$

Dimostriamolo per un vettore v $\Rightarrow$ la matrice di Gram è $v \cdot v$

e $G(v) = v \cdot v = \|v\|^2 = \|u\|^2$ OK

Dimostriamolo per due vettori v_1, v_2 $\Rightarrow$ la matrice di Gram è $\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix}$

prendo $u_1 = v_1$ $\Rightarrow$ la Matrice diventa $\begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot u_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix}$

considero $v_2 = \alpha u_1 + u_2$

$u_2 = v_2 - \alpha u_1$

CON OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA E COLONNA :

$$\overset{R_2 - \alpha R_1}{\sim} \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot u_1 - \alpha u_1 \cdot u_1 & v_2 \cdot v_2 - \alpha u_1 \cdot v_2 \end{pmatrix} =$$

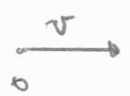
$$= \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot v_2 \\ (v_2 - \alpha u_1) \cdot u_1 & \underbrace{(v_2 - \alpha u_1)}_{u_2} \cdot v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot v_2 \\ u_2 \cdot u_1 & u_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} \overset{C_2 - \alpha C_1}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot (v_2 - \alpha u_1) \\ u_2 \cdot u_1 & u_2 \cdot (v_2 - \alpha u_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot u_2 \\ u_2 \cdot u_1 & u_2 \cdot u_2 \end{pmatrix}$$

e così analogamente per K vettori. C.V.D.

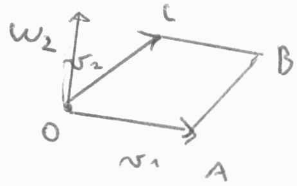
Parallelepipedo costruito su k vettori l. indip in $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$.

Esempio $k = 1$



Il Parallelepipedo è il segmento definito da v, la sua misura è pari a $\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{G(v)}$

Per $k=2$

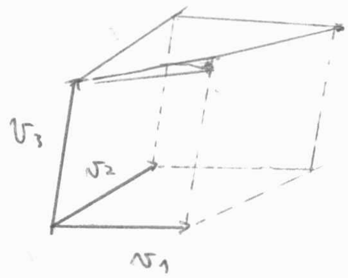


Il Parallelepipedo è il Parallelogramma definito da v_1 e v_2, la sua misura è la sua area

$$V(v_1,v_2) = \text{base per altezza} = \|v_1\| \cdot \|w_2\|$$

$$= \sqrt{G(v_1,w_2)} = \sqrt{G(v_1,v_2)}$$

Per $k=3$



Il volume del Parallelepipedo

$$V(v_1,v_2,v_3) = \sqrt{G(v_1,v_2,v_3)}$$

e così via, il volume del parallelepipedo costruito su k vettori in R^n è $V(v_1,v_2,\dots,v_k) = \sqrt{G(v_1,v_2,\dots,v_k)}$.

In R^n sia data una base $B_{\perp n} = \{w_1,\dots,w_n\}$

prendo n vettori di R^n, $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$, $j=1,\dots,n$ posto $A=(a_{ij})$

dimostrare che $(\det A)^2 = |\underbrace{G(v_1,\dots,v_n)}_{\text{Volume Parall. al quadrato}}|$

Esercizio