9-1-2013

ESEMPI: (I) • Siano $(\mathbb{N},+)$ e $(\mathbb{N},\cdot)$ due strutture algebriche su $\mathbb{N}$ ed $f:(\mathbb{N},+)\longrightarrow(\mathbb{N},\cdot)$ l'applicazione così definita:

$$f(n)=2^n$$

f è un morfismo?
Dobbiamo ~~definire~~ verificare che $\forall\ n,k\in\mathbb{N}$:

$$f(n+k)=f(n)\cdot f(k)$$

Allora: $f(n+k)=2^{n+k}$ mentre $f(n)\cdot f(k)=2^n\cdot 2^k$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ per le regole delle potenze:

$$2^{n+k}=2^n\cdot 2^k$$

f è un morfismo

ESERCIZIO: f è ISOMORFISMO? (CIOÈ È BIETTIVO?)

(II) • considero su $(\mathbb{Z},+)$ l'applicazione $f:(\mathbb{Z},+)\longmapsto(\mathbb{Z},+)$,

$$n\longmapsto 5n$$

f è morfismo di gruppi?

↳ elemento neutro: $f(0)=0$ verificato per $(\mathbb{Z},+)$? Sì e $f(n+k)=f(n)+f(k)$ $\forall n,k\in\mathbb{Z}$

$$5(n+k)=5n+5k \quad \text{sì}$$

f è morfismo di gruppi

(III) • Sia $f:(\mathbb{Z},+)\longmapsto(\mathbb{Z},\cdot)$ verificare ~~che~~ se f è morfismo

$$n\longmapsto n^2$$

$$f(n+k)=(n+k)^2\neq f(n)\cdot f(k)=n^2\cdot k^2$$

f non è morfismo.

DEFINIZIONE: Siano $(G,\star)$ e $(G',\square)$ gruppi e $\phi:G\longmapsto G'$ morfismo di gruppi.
Chiamo <u>NUCLEO</u> di ϕ il sottoinsieme di G così definito:
detto $\ker\phi$ il nucleo di ϕ, $\ker\phi=\phi^{-1}(e')$, con e' elemento neutro di G'

CIOÈ $\ker\phi=\{g\in G\mid\phi(g)=e'\}$

ESERCIZIO: 1) dimostrare che $\ker\phi$ è sottogruppo di G. (cioè ~~che~~ se $g_1,g_2\in\ker\phi$, allora $g_1\star g_2\in\ker\phi$

ESERCIZIO 2): dimostrare che $Im\,\phi$ è sottogruppo di G', cioè se $h_1, h_2 \in Im\,\phi \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 \square h_2 \in Im\,\phi$

PROPOSIZIONE: Sia $\phi : (G, *) \longmapsto (H, \square)$ morfismo di gruppi, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $\phi(e) = e'$ con e, e' elementi neutri per le operazioni introdotte rispettivamente in G e H.

2) $\phi(g^{-1}) = [\phi(g)]^{-1}$

3) ϕ è iniettiva $\Leftrightarrow \ker\phi = \{e\}$

dimostrazione: 1) $\phi(e) = \phi(e * e) = \phi(e) \square \phi(e) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\phi(e) \square [\phi(e)]^{-1}}_{\text{per definizione elemento } \square \text{ reciproco = elemento neutro}} = \phi(e) \square \underbrace{\phi(e) \square [\phi(e)]^{-1}}$$

$$e' = \underbrace{\phi(e) \square e'}$$

$$e' = e'$$

cvd

2) e' elemento neutro si consideri come:

$\phi(e) = \phi(g * g^{-1}) = \phi(g) \square \phi(g^{-1}) = e'$ come appena dimostrato

$\Longrightarrow$ affinché questa operazione ($\square$) dia e':

$$\phi(g^{-1}) = [\phi(g)]^{-1}$$

cvd

3):

$3_1)$ • ϕ 1-1 (iniettività) $\Rightarrow \ker\phi = \{e\}$:

Sia $g \in \ker\phi \Rightarrow \phi(g) = e' = \phi(e)$ come appena dimostrato

ma ϕ è iniettiva $\Rightarrow g = e$

cvd

$3_2)$ • ϕ 1-1 $\Leftarrow \ker\phi = \{e\}$:

Siano $g_1, g_2 \in G$ tale che $\phi(g_1) = \phi(g_2)$. Opero $\square$ per entrambi i membri:

$\phi(g_1) \square (\phi(g_2))^{-1} = e'$

$\phi(g_1) \square \phi(g_2^{-1}) = e'$

perché è morfismo

$\phi(g_1 * g_2^{-1}) = e' \Rightarrow g_1 * g_2^{-1} \in \ker\phi \Rightarrow \underline{g_1 * g_2^{-1} = e}$ per ipotesi $\Rightarrow$

$\Rightarrow g_2^{-1} = g_1^{-1}$ (altrimenti non avrei e) $\Rightarrow$

$\Rightarrow g_1 = g_2$

ESERCIZIO: Studiare le seguenti strutture algebriche:

$$\left(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), +\right), \quad \left(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \cdot\right), \quad \left(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot\right)$$

" gruppo — " anello non commutativo.

conseguenze: non vale la legge di annullamento del prodotto

esempio: $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{non nulla}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{non nulla}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nulla}}$

Dato $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ è invertibile}\}$, se considero la struttura $(GL(n,\mathbb{R}), \cdot)$ dimostrare che è gruppo.

(Esso è gruppo LINEARE GENERALIZZATO)

Ricordo che $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ è detta ortogonale se è invertibile e $A^{-1} = A^T$.

L'insieme di tali matrici è indicato con $O_n(\mathbb{R})$

Pertanto $O_n(\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R})$ e in particolare O_n è sottogruppo di $(GL(n,\mathbb{R}), \cdot)$ ed è detto gruppo ORTOGONALE.

In particolare studiare $O_2(\mathbb{R})$

(Se A è ortogonale, $\det A = \pm 1$. Infatti:

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot A^T, \quad \text{cioè } A\cdot A^{-1} = A\cdot A^T = I \Rightarrow \det(A\cdot A^T) = \det I = 1$$

per il teorema di Binet $|A|\cdot|A^T| = 1 \Rightarrow |A|\cdot|A| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |A| = \pm 1$$

cvd)

DEFINIZIONE: *

Siano $(V, +, \cdot\lambda)$ e $(W, +, \cdot\lambda)$ due spazi vettoriali in $\mathbb{R}$, i morfismi tra spazi vettoriali sono detti applicazioni lineari e verificano le proprietà: detta $f: V \longrightarrow W$ l'applicazione: $f(v_1+v_2) = f(w_1) + f(w_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

$f(\lambda \cdot v) = f(v)\cdot\lambda \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall v \in V.$

Esempio: $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2 + 1$ | VEDIAMO SE: è un morfismo, cioè è un'applicazione lineare in questo caso?

vogliamo che $f(x+y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(x+y) = (x+y)^2 + 1$;

x^2+1+y^2+1 NON è applicazione lineare

Le UNICHE applicazioni lineari in $\mathbb{R}$ sono DATE DA polinomi lineari omogenei!

es: $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$x \longmapsto 7x$

SE passo a $\mathbb{R}^n$. Come considero le applicazioni del tipo:

$$\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^p \quad ?$$

(ESEMPIO: $(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (2x_1+3x_2+5x_n, 2x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}x_2+\dots, \dots, \dots, 7x_1+3x_2-x_n)$)

es. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \to (x-y, 2x)$ ogni componente dell'immagine DEVE ESSERE DEFINITA DA POLINOMI lineari omogenei.

<u>OSSERVAZIONE</u>: 1 e 2 della definizione * possono essere sostituite da un'unica proprietà:

$$f(x_1 v_1 + x_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \quad \forall \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R},$$
$$e \ \forall v_1, v_2 \in V$$

ESERCIZI:
dimostrare che $\ker f = \{v \in V \mid f(v)=0\}$ è sottospazio vettoriale di V DOVE $f: V \to W$ è APPLICAZIONE LINEARE

$f(V) = \mathrm{Im} f$ è sottospazio vett. di W.

TEOREMA DELLE DIMENSIONI: Data $f: V \longmapsto W$ applicazione lineare tra spazi vettoriali con $\dim V = n$ e $\dim W = p$. =>

=> $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim V$

↳ dimostrazione: posto $\ker f$ generato da $u_1, \dots, u_k$

$\ker f = \langle\langle u_1, \dots, u_k \rangle\rangle$

e $\mathrm{Im} f = \langle\langle w_1, \dots, w_q \rangle\rangle$

prendo $w \in \mathrm{Im} f$ => ......