la scorsa volta: 1) $|A|=0 \iff \lambda=0$ è autovalore di $T: V \to V$ $\Big|$ $[T]_B=A$. 20/3/2013

nella dimostrazione si è detto che: $p_A(\lambda)$ polinomio caratteristico ha per termine noto $|A|$.

infatti sostituendo a λ 0 $\Rightarrow$ per $\lambda=0 \Rightarrow p_A(0)=|A-\lambda I|=|A-0I|=|A|$

se $|A-\lambda I|=0 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow$ in 1) "$\Leftarrow$": è subito verificata;

"$\Rightarrow$": se $\det(A)=0 \Rightarrow$ il termine noto del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ è $=0$ $\Rightarrow$ si può raccogliere λ in $p_A(\lambda)$ e quindi scomporre il $p_A(\lambda)$ in $\lambda q_A(\lambda) \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda=0$ è radice di $p_A(\lambda)$

La ricerca di autovalori e autovettori trova grandi applicazioni:
per esempio
- i suoni prodotti dalla sovrapposizione di suoni elementari della corda:
  la ricerca delle frequenze è legata alla ricerca degli autovettori (che rappresentano le armoniche delle onde). LEGATI AD UN OPPORTUNO OPERATORE
- i livelli energetici dell'elettrone: si associa un operatore;
  i livelli energetici sono gli autovalori dell'operatore; le forme d'onda sono legate agli autovettori.
- la meccanica quantistica è legata all'utilizzo di matrici.

$\boxed{\text{FORME:}}$ applicazione che vanno da uno spazio vett. e $\mathbb{R}$ in un campo (cioè il codominio deve essere un campo), visto quest'ultimo come spazio vettoriale su se stesso.
↳ si possono studiare: $\varphi: V \longmapsto \mathbb{R}$ con V spazio vettoriale reale.

SE φ è ~~forma~~ forma e φ è lineare $\Rightarrow$ φ è forma lineare (o funzionale lineare)

$\{\varphi: V \longmapsto \mathbb{R}$ forme lineari$\}$ è spazio vettoriale definito su $\mathbb{R}$, indicato con $\boxed{Hom(V, \mathbb{R})}$.
insieme delle forme lineari su V

si definiscono LE OPERAZIONI: $\varphi_1+\varphi_2$ e $\lambda\varphi$, con $\lambda \in \mathbb{R}$:

→ $(\varphi_1+\varphi_2)$ è la somma di due applicazioni, in particolare
L'IMMAGINE DELLA SOMMA È la somma delle immagini:

$(\varphi_1+\varphi_2): V \longrightarrow \mathbb{R}$

$v \longmapsto (\varphi_1+\varphi_2)(v)=\varphi_1(v)+\varphi_2(v)$. $\varphi_1+\varphi_2$ è ancora applicazione lineare

→ $\lambda\varphi: V \longmapsto \mathbb{R}$

$v \longmapsto (\lambda\varphi)(v) = \lambda(\varphi(v))$. $\lambda\varphi$ è ancora applicazione lineare

in $Hom(V, \mathbb{R})$ valgono le proprietà che definiscono uno spazio vettoriale.

DA VERIFICARE LE PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI PER $(\varphi_1+\varphi_2)$ E $\lambda\varphi$.

*Qual è la dimensione di $Hom(V,\mathbb{R})$? **Quali sono le sue basi?

ESEMPI DI FORME

es: sia $V = \{$funzioni $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili in $x_0\} \mapsto \mathbb{R}$

$$f \longmapsto \frac{df}{dx}(x_0)$$

es: sia $V = \{$funzioni $f:[0,1] \mapsto \mathbb{R}$ integrabili in $[0,1]\}$ per Riemann

$$f \longmapsto \int_0^1 f(x)\,dx$$

* La dimensione è determinata una volta ultimata la ricerca di una base

** Sia $\dim V = n \Rightarrow$ fisso una base $B_V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Considero una forma LINEARE $\eta_1 : V \longmapsto \mathbb{R}$ e un'altra: $\eta_2 : V \longmapsto \mathbb{R}$ ...

$u_1 \longmapsto 1$, $u_2 \longmapsto 0$, $\vdots$, $u_n \longmapsto 0$
$u_1 \longmapsto 0$, $u_2 \longmapsto 1$, $\vdots$, $u_n \longmapsto 0$

... fino ad n: $\eta_n : V \longmapsto \mathbb{R}$

$u_1 \longmapsto 0$, $u_2 \longmapsto 0$, $\vdots$, $u_n \longmapsto 1$

CIOÈ ~~[illegible]~~, considero $\eta_j : V \longmapsto \mathbb{R}$ tale che $\eta_j(u_i) = 0 \quad \forall i \neq j$

$\eta_j(u_j) = 1$ per $i = j$

η_j così definita È DETTA simbolo di Kronecker:

$$\eta_j(u_i) = \delta_{ij} \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

PRESO $v \in V \Rightarrow v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$,
$\Rightarrow$
la forma η_j agisce come:

$$\eta_j(v) = \eta_j(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) = \overbrace{\alpha_1\eta_j(u_1) + \alpha_2\eta_j(u_2) + \dots + \alpha_n\eta_j(u_n)}\ = \alpha_j \Rightarrow \text{ perché costituiscono}$$

(con v visto come combinazione lineare degli elementi della base)

η_j è lineare

affinché $\eta_1, \dots, \eta_n$ COSTITUISCANO UNA base, devono essere linearmente indipendenti E GENERARE $Hom(V,\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Dunque pongo $\underbrace{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \dots + a_n\eta_n = 0}$ (combinazione lineare di forme).

queste due applicazioni sono uguali se le immagini DI OGNI ELEMENTO DEL DOMINIO sono uguali.

$\Downarrow$

$$\forall v \in V \ (a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \dots + a_n\eta_n)(v) = 0(v) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1 \eta_1(v) + a_2 \eta_2(v) + \dots + a_n \eta_n(v) = 0$

deve valere $\forall v \in V$

questa relazione deve valere anche per la base!

prendo $v = u_1 \Rightarrow a_1 \eta_1(u_1) + a_2 \eta_2(u_1) + \dots + a_n \eta_n(u_1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ per la definizione del simbolo di Kronecker:

$a_1 = 0$

continuando il procedimento fissando $v = u_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \eta_1(u_2) + a_2 \eta_2(u_2) + \dots + a_n \eta_n(u_2) = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

pertanto tutti i coeff. sono nulli...

... infatti CONTINUANDO CON $v = u_3$, $v = u_4$, ...

... $v = u_n \Rightarrow a_1 \eta_1(u_n) + a_2 \eta_2(u_n) + \dots + a_n \eta_n(u_n) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = 0$

Ho dimostrato che $\eta_1 \dots \eta_n$ sono linearmente indipendenti... ma sono anche generatori?

Sia ora $f : V \longmapsto \mathbb{R} \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$; $v \longmapsto \beta$

Supponiamo che $f(v) = \beta$

$\Rightarrow \exists (a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \dots + a_n \eta_n)(v) = \beta$?

esiste una combinazione lineare che rende β?

si può esprimere v come $v = (x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \dots + a_n \eta_n)(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n) = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \dots + a_n \eta_n)(x_1 u_1) + \dots + (a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \dots + a_n \eta_n)(x_n u_n) = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 (a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \dots + a_n \eta_n)(u_1) + \dots + x_n (a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \dots + a_n \eta_n)(u_n) = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = \beta$

per quali $a_1, a_2, \dots a_n$ vale l'uguaglianza con β?

cerco le immagini: (per il simbolo di Kronecker...)

- $f(u_1) = \beta_1 \Rightarrow a_1 = \beta_1$
- $f(u_2) = \beta_2 \Rightarrow a_2 = \beta_2$
- ⋮
- $f(u_n) = \beta_n \Rightarrow a_n = \beta_n$

$\Rightarrow$ ho trovato una combinazione lin. dei vettori di base tale che:

$f(v) = (\beta_1 \eta_1 + \beta_2 \eta_2 + \dots + \beta_n \eta_n)(v)$

$\forall v \in V$.

$\eta_1, \dots, \eta_n$ generano lo spazio: infatti $f = \beta_1 \eta_1 + \dots + \beta_n \eta_n$.

$\Rightarrow \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ è generato da $\eta_1 \dots \eta_n$.

$\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}) = \langle\langle \eta_1 \dots \eta_n \rangle\rangle$.

Lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ ha dimensione n.

(la stessa di V).

Hom $(V, \mathbb{R})$ è detto il DUALE di V ed è indicato come V^* oppure $V^\vee$.

La base $\eta_1 \dots \eta_n$ è detta BASE DUALE della BASE $\mathcal{B}_V = \{u_1, \dots, u_n\}$

Poiché Hom $(V, \mathbb{R})$ ha dimensione finita, si può lavorare con ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ LE COORDINATE DEGLI ELEMENTI DI V^*, FISSATA UNA BASE DELLO SPAZIO

Poiché sia V sia V^* hanno medesima ~~base~~ DIMENSIONE, posso fissare un isomorfismo (una volta fissate le basi).

ESERCIZIO:
DETERMINARE TALE ISOMORFISMO (DA DIMOSTRARE)

Cosa sono le FORME BILINEARI? Sono FORME CHE VERIFICANO DETERMINATE PROPRIETÀ

Definizione: Sia V spazio vettoriale REALE n-dimensionale $\Rightarrow$ un'applicazione

$F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta forma BILINEARE se

(prodotto cartesiano)

soddisfa le seguenti proprietà:

linearità sulla prima componente

① $F((v_1 + v_2, w)) = F((v_1, w)) + F((v_2, w))$;

② $F((\lambda v_1, w)) = \lambda F((v_1, w))$;

Att! $F((\;))$ — definisce l'immagine; definisce la coppia

analogamente linearità sulla seconda componente

③ $F((v_1, w_1 + w_2)) = F((v_1, w_1)) + F((v_1, w_2))$;

④ $F((v_1, \lambda w)) = \lambda F((v_1, w))$.

$\forall\, v_1, v_2, w_1, w_2, w \in V$ e $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

Att! F bilineare $\not\Rightarrow$ F lineare

es: $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longmapsto xy$

$\to$ è forma bilineare?

si dimostra per la prima componente:

$$F((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y)) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) y = \alpha_1 x_1 y + \alpha_2 x_2 y = \alpha_1 F((x_1, y)) + \alpha_2 F((x_2, y))$$

ANALOGAMENTE si dimostra anche per la seconda componente (FARE)

Pertanto la risposta è sì.

F è forma lineare?

si deve dimostrare che è fun delle somme è la somma delle fun:

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = F((x_1 + x_2), (y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2).$$

$\overset{?}{=}$

$$F((x_1, y_1)) + F((x_2, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$\neq$

Pertanto la risposta è NO.