(1) 20/05/2013

PROPOSIZIONE: Autovettori di un operatore isometrico, relativi ad autovalori diversi sono ortogonali.

DIMOSTRAZIONE: Gli autovalori dell'operatore isometrico $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sono solo $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ $\Rightarrow$ considero v_1 e $v_2 \in \mathbb{R}^n$ tali che $T(v_1) = v_1$ e $T(v_2) = -v_2$

$$\Rightarrow v_1 \cdot v_2 = T(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot T^{-1}(v_2) = v_1 \cdot (-v_2) = -(v_1 \cdot v_2)$$

$$\Rightarrow v_1 \cdot v_2 = 0 \qquad \left(T^{-1}(v_2) = ? \quad T^{-1}(T(v_2)) = T^{-1}(-v_2) \Rightarrow v_2 = -T^{-1}(v_2) \Rightarrow T^{-1}(v_2) = -v_2 \right) \Rightarrow v_1 \perp v_2$$

cvd

TEOREMA DI STRUTTURA DEGLI OPERATORI ISOMETRICI

Dato $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ operatore isometrico, $\exists$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, $B_{\perp n}$, tale che:

$$[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & & & & 0 \\ & & & -1 & 0 & & & 0 \\ & 0 & & & -1 & & & 0 \\ & & 0 & & & M_1 & & \\ & & & & & & M_2 & \\ & & & & & & & \ddots \; M_k \end{pmatrix} \quad \text{con } M_j = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_j & -\operatorname{sen}\vartheta_j \\ \operatorname{sen}\vartheta_j & \cos\vartheta_j \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} \text{Matrice di} \\ \text{una rotazione} \end{matrix} \right\}$$

$$0 < \vartheta_j < \pi$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & & & 0 & -1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & \ddots & 0 & & \\ & & & & & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & M_1 & 0 \\ & & & & & & & 0 \; M_2 & 0 \\ 0 & & & & & & & 0 & \ddots \; M_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

↳ Matrice associata ad una rotazione

↳ Matrice associata ad una simmetria attorno all'asse x.

↳ Un vettore v, prima viene ribaltato rispetto all'asse x, poi viene ruotato. È una composizione descritta dalla moltiplicazione di due matrici.

② **DIMOSTRAZIONE:** Per induzione su n. ②

per $n=1$ abbiamo già verificato il Teorema (ed anche per $n=2$)

Supponiamo il Teorema dimostrato fino alla dimensione $n-1$, cioè per $T: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ e dimostriamolo per $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

1) Caso: Supponiamo che esista autovalore reale per T $\Rightarrow$ considero un autovettore ad esso relativo, u, dato $\langle\langle u \rangle\rangle$, sappiamo esistere $\langle\langle u \rangle\rangle^\perp$ tale $\langle\langle u \rangle\rangle \oplus \langle\langle u \rangle\rangle^\perp = \mathbb{R}^n$ con $\dim \langle\langle u \rangle\rangle^\perp = n-1$ $\Rightarrow$ $T\big|_{\langle\langle u \rangle\rangle^\perp} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$

[T ristretto al sottospazio $\to$]

Per ipotesi induttiva, $\exists$ base di $\langle\langle u \rangle\rangle^\perp$, ortonormale, B', tale che

$$\left[T\big|_{\langle\langle u \rangle\rangle^\perp}\right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & M_1 & \\ 0 & & & & & & & \ddots \; M_k \end{pmatrix}$$

Se prendo $B_{\perp n}$ base di $\mathbb{R}^n$ così formata $\left\{\frac{u}{\|u\|}\right\} \cup B'$

$$\Rightarrow [T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \left[T\big|_{\langle\langle u \rangle\rangle^\perp}\right]_{B'} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

se $T(u) = u$, mentre ~~se~~

se $T(u) = -u$, posta $B' = \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l, v_1, \dots, v_s\}$

con $T(v_j) = 1, \dots, k$ e $T(w_i) = -w_i$, $i = 1, \dots, l$

$\Rightarrow$ prendendo $B_{\perp M} = \left\{v_1, \dots, v_k, \frac{u}{\|u\|}, w_1, \dots, w_l, v_1, \dots, v_s\right\}$

$\Rightarrow$ la base è quella giusta, cioè avremo $[T]_{B_{\perp n}}$

2) Caso: Supponiamo $\nexists$ autovalori reali (facoltativo; su lezioni in internet)

↳ In pagina ①

c.v.d.

③ In $\mathbb{R}^3$ $\exists$ una base ortonormale $B_{\perp_n}$ tale che data $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ isometrico $[T]_{B_{\perp_n}} =$

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ IDENTITA' Determinante $= +1$

② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det = -1$ [Simmetria rispetto al piano xy]

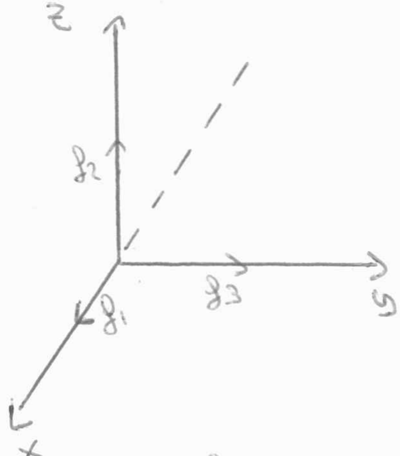
③ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det = +1$ [è ⑤ con $\vartheta = \pi$]

④ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det = -1$ [è ⑥ con $\vartheta = \pi$]

⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ $\det = +1$

$0 \leq \vartheta \leq \pi$

⑥ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ $\det = -1$



⑤ $T(f_1) = f_1 \Rightarrow \langle\langle f_1 \rangle\rangle$ è autospazio relativo a $\lambda = +1$

$T(f_2) = \cancel{0 f_1} + \cos\vartheta f_2 + \operatorname{sen}\vartheta f_3$

$T(f_3) = \cancel{0 f_1} - \operatorname{sen}\vartheta f_2 + \cos\vartheta f_3$

La retta attorno alla quale ruota il piano si chiama asse di rotazione.
Il piano di rotazione è il sottospazio vettoriale in cui avviene la rotazione
ED E' ORTOGONALE ALL'ASSE DI ROTAZIONE!