25\03\13

~~[illegible]~~

$$\varphi : V \longrightarrow V^* = \{ f : V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ lineari} \}$$

$$v \longrightarrow \varphi(v) = f_1$$

$$w \longrightarrow \varphi(w) = f_2$$

Costruzione Morfismo tra V e $\mathbb{R}$

$$V \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n$$

$$v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longmapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Costruire l'applicazione come esercizio ..

$F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ è forma bilineare se; V SPAZIO VETT; $\dim V = n$,

(1) $$F((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w)) = \alpha_1 F((v_1, w)) + \alpha_2 F((v_2, w))$$

(2) $$F((v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2)) = \beta_1 F((v, w_1)) + \beta_2 F((v, w_2))$$

fissata una base B_V di V, con $\dim V = n$, $B_V = \{ v_1, \dots, v_n \}$

$$\Rightarrow F((v, w)) = F((x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n, y_1 v_1 + \dots + y_n v_n)) =$$

$$= x_1 F((v_1, y_1 v_1 + \dots + y_n v_n)) + \dots + x_n F((v_n, y_1 v_1 + \dots + y_n v_n)) =$$

$$= x_1 [y_1 F((v_1, v_1)) + y_2 F((v_1, v_2)) + \dots + y_n F((v_1, v_n))]$$

$$+ x_2 [y_1 F((v_2, v_1)) + \dots + y_n F((v_2, v_n))] + \dots +$$

$$x_n [y_1 F((v_n, v_1)) + \dots + y_n F((v_n, v_n))]$$

Applicando la proprietà di Bilinearità distribuisco $x_1, \dots, x_n$ all'interno delle somme.

si HA:

(*) $$x_1 y_1 F((v_1, v_1)) + \dots + x_1 y_n F((v_1, v_n)) + \dots + x_n y_1 F((v_n, v_1)) + \dots + x_n y_n F((v_n, v_n)).$$

Costruiamo la matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ in questo modo:

metto in A le immagini dai COPPIE DI vettori di Base.

$$A = \begin{pmatrix} F((v_1,v_1)) & F((v_1,v_2)) & \cdots & F((v_1,v_n)) \\ F((v_2,v_1)) & F((v_2,v_2)) & \cdots & F((v_2,v_n)) \\ F((v_3,v_1)) & F((v_3,v_2)) & \cdots & F((v_3,v_n)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F((v_n,v_1)) & F((v_n,v_2)) & \cdots & F((v_n,v_n)) \end{pmatrix} = [F]_{B_V}$$

$\Rightarrow$ Se opero il prodotto Matriciale $(x_1,\dots,x_n)\cdot A\cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

ottengo il numero reale dato dalla somma precedente ⊛

posto

$$\boxed{\begin{array}{l} X = [v]_{B_V} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } Y = [u]_{B_V} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ \text{allora si scrive } \quad X^T\cdot A\cdot Y = F((v,u)) \end{array}}$$

Allora una volta fissata una base in V, ho una matrice associata all'applicazione data.

<u>OSSERVAZIONE</u>: Si noti che data la base B_V, la forma F è data da un polinomio di 2° grado omogeneo nelle coordinate dei vettori.

esempio:

$$F: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \longmapsto 2x_1y_2 - x_1y_1 + x_2y_2$$

F è forma <u>Bilineare</u>.

$$F((a_1v_1+a_2v_2, u)) = a_1F((v_1,u)) + a_2F((v_2,u))$$

e $F((v, b_1u_1+b_2u_2)) = b_1F((v,u_1)) + b_2F((v,u_2))$

Posto $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_2 \tilde{x}_1 \\ a_1 x_2 + a_2 \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$F((a_1 v_1 + a_2 v_2, w)) = 2(a_1 x_1 + a_2 \tilde{x}_1) y_2 - (a_1 x_1 + a_2 \tilde{x}_1) y_1 + (a_1 x_2 + a_2 \tilde{x}_2) y_2 = 2a_1 x_1 y_2 + 2a_2 \tilde{x}_1 y_2 - a_1 x_1 y_1 - a_2 \tilde{x}_1 y_1 + a_1 x_2 y_2 + a_2 \tilde{x}_2 y_2$$

$$a_1 F((v_1, w)) + a_2 F((v_2, w)) = 2a_1 x_1 y_2 - a_1 x_1 y_1 + a_1 x_2 y_2 + 2a_2 \tilde{x}_1 y_2 - a_2 \tilde{x}_1 y_1 + a_2 \tilde{x}_2 y_2$$

Coincidono

Analogamente per la seconda condizione.

$$\text{In } \mathbb{R}^2 \text{ prendiamo la base canonica } \mathcal{E} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} F((e_1, e_1)) & F((e_1, e_2)) \\ F((e_2, e_1)) & F((e_2, e_2)) \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$F((1,0),(1,0)) = -1$

$F((1,0),(0,1)) = 2$

$F((0,1),(1,0)) = 0$

$F((0,1),(0,1)) = 1$

$$X^T A Y = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (-x_1, 2x_1 + x_2) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_2}$$

Se cambio la base, la matrice sarà diversa ma sarà comunque associata alla forma bilineare.

Fissata una base B in V $\Rightarrow$ associata alla forma $F: V \times V \to \mathbb{R}$

allora possiamo determinare la matrice $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ t.c. $L((v, w)) = [v]_B^T \cdot A \cdot [w]_B$

Cambiamo base in V: chiamo B_1 $\Rightarrow$ ho un'altra matrice associata ad F, $A_1 \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \quad L((v, w)) = [v]_{B_1}^T \cdot A_1 \cdot [w]_{B_1}$$

$[v]_{B_1} = S [v]_B$ dove S è la matrice del cambiamento di base da B e B_1.

$$[v]_{B_1}^T \cdot A_1 \cdot [w]_{B_1} = \left[S [v]_B \right]^T \cdot A_1 \cdot \left[S \cdot [w]_B \right] =$$

$$= [v]_B^T \cdot S^T \cdot A_1 \cdot S \cdot [w]_B = [v]_B^T A [w]_B$$

Essendo v e w vettori generici di V allora $\boxed{S^T A_1 S = A}$

DEFINIZIONE:

Due Matrici quadrate $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

sono dette congruenti se $\exists$ una matrice S invertibile tale che $B = S^T A S$

SCRIVEREMO $A \sim_C B$ PER INDICARE: A CONGRUENTE B.

(riflessiva, simmetrica, transitiva)

4] Esercizio: Far vedere che la Relazione di congruenza tra matrici è di equivalenza.