OPERATORI SIMMETRICI

Definizione:

$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ operatore si dice

SIMMETRICO se:

$$T(u) \cdot v = u \cdot T(v) \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n$$

VEDIAMO COM'È LA MATRICE ASSOCIATA AD UN OPERATORE SIMMETRICO IN UNA BASE ORTONORMALE:

$\Downarrow$

Sia $B_{\mathbb{R}^n} = B_{\perp n}$ e sia $A = [T]_{B_{\perp n}}$

$\Rightarrow$ Posto $X = [u]_{B_{\perp n}}$, $Y = [v]_{B_{\perp n}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \cdot X = [T(u)]_{B_{\perp n}} \\ A \cdot Y = [T(v)]_{B_{\perp n}} \end{cases}$$

SAPPIAMO CHE $T(u) \cdot v = u \cdot T(v)$

$\Downarrow$

$$\Rightarrow (A \cdot X)^T \cdot I \cdot Y = X^T \cdot I \cdot (A \cdot Y)$$

[NB Matrice associata a prodotto scalare é I]

$$\Rightarrow X^T \cdot A^T \cdot Y = X^T \cdot A \cdot Y$$

$\Downarrow$

$$A^T = A \Leftarrow \text{Vera } \forall\, X \text{ e } Y \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$ $[T]_{B_{\perp n}}$ é simmetrica

PROPOSIZIONE

Se T é simmetrico e U é sottospazio invariante per T

$\Rightarrow U^{\perp}$ é invariante per T

Dimostro

[Se $v \in U^{\perp} \Rightarrow T(v) \in U^{\perp}$] Tg

Ovvero dobbiamo valutare $T(v) \cdot u$ $(u \in U)$

$\Downarrow$

$T(v) \cdot u = T(u) \cdot v$

$T(u) \in U$ (poiché U invariante per T)

$\Rightarrow T(u) \cdot v = 0 = T(v) \cdot u$

$\Downarrow$

$T(v) \in U^{\perp}$

cvd

Proposizione

Autovettori di un T simmetrico relativi ad autovalori $\neq$, sono ortogonali.

Dimostro

v_1 e $v_2 \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 \\ T(v_2) &= \lambda_2 v_2 \end{aligned}$ con: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $v_1, v_2 \neq 0$

$v_1 \cdot v_2 = ?$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(v_1) \cdot v_2 = \lambda_1 v_1 \cdot v_2 = \lambda_1 (v_1 \cdot v_2) \\ \quad \shortparallel \\ v_1 \cdot T(v_2) = v_1 \cdot \lambda_2 v_2 = \lambda_2 (v_1 \cdot v_2) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\lambda_1 (v_1 \cdot v_2) = \lambda_2 (v_1 \cdot v_2)}_{(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 \cdot v_2) = 0}$$

Essendo per Hp $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\Rightarrow v_1 \cdot v_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

v_1 ortogonale v_2

cvd

PROPOSIZIONE

T simmetrico $\Rightarrow$ ha tutti gli autovalori Reali.

$\Downarrow$

Verifichiamolo per T simmetrici in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$

In $\mathbb{R}_e$ ($\mathbb{R}$ EUCLIDEO)

$$T : \mathbb{R}_e \longrightarrow \mathbb{R}_e$$

$$x \longmapsto \alpha x$$

$\Rightarrow$ T é simmetrico?

$\Rightarrow [T]_{B_{\perp n}} = [T]_C = (\alpha)$: E' MATRICE SIMMETRICA

$\Rightarrow$ T é simmetrico

oppure $T(x) \circ y = x \circ T(y)$

$\alpha x \circ y = x \circ \alpha y$

siamo in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha(xy) = \alpha(xy)$

$\Rightarrow$ Dato che siamo in $\mathbb{R}$ $\exists$ un unico autovalore $\alpha \in \mathbb{R}$.

In $\mathbb{R}^2$

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow$ Sappiamo che $[T]_C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow ac - \lambda(a+c) + \lambda^2 - b^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(a+c) + ac - b^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{a+c \pm \sqrt{a^2+c^2+2ac+4b^2-4ac}}{2} =$$

$$= \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0 \\ \forall\ a, c, b \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\ \lambda \in \mathbb{C} - \{\mathbb{R}\}$$

Dimostriamolo ora per operatori simmetrici $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Consideriamo il polinomio caratteristico di $[T]_B = A$
Tutte le radici sono reali: infatti supponiamo $\exists$ una radice complessa λ_0 e sia z_0 la soluzione complessa del sistema $(A - \lambda_0 I) z = 0$ con $z_0 \in \mathbb{C}^n$; possiamo vedere z_0 come autovettore associato all'autovalore λ_0 per l'endomorfismo associato ad A su $\mathbb{C}^n$: $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \implies A z_0 = \lambda_0 z_0$ e

$$z \longmapsto Az$$

considerando i coniugati $\overline{A z_0} = \overline{\lambda_0 z_0} \implies \overline{A}\,\overline{z_0} = \overline{\lambda_0}\,\overline{z_0} = $
$= A\overline{z_0} = \overline{\lambda_0}\,\overline{z_0}$

Per la simmetria di T abbiamo $z \cdot T(w) = T(z) \cdot w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^n \implies$
prendo $z = \overline{z_0}$ e $w = z_0 \implies$
$\implies$ Considero $\overline{z_0}^T A z_0$:

$$\overline{z_0}^T (A z_0) = \overline{z_0}^T \lambda_0 z_0 = \lambda_0 \overline{z_0}^T z_0 \, ,$$

INOLTRE

$$(\overline{z_0}^T A) z_0 = (\overline{z_0}^T A^T) z_0 = (A \overline{z_0})^T z_0 = (\overline{\lambda_0}\,\overline{z_0})^T z_0 = \overline{\lambda_0}\,\overline{z_0}^T z_0 \implies$$

$$\implies \lambda_0 \overline{z_0}^T z_0 = \overline{\lambda_0}\,\overline{z_0}^T z_0 \implies \lambda_0 = \overline{\lambda_0} \implies \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

c.v.d

TEOREMA DI STRUTTURA PER T SIMMETRICA

Dato $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ simmetrico

$\Rightarrow \exists$ una $B_{\perp n}^{\mathbb{R}^n}$ / $[T]_{B_{\perp n}} = D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \ddots \; \alpha_n \end{pmatrix}$

(Un operatore simmetrico è sempre diagonalizzabile)

$\Downarrow$

α_j $(\forall j)$ autovalori di T

$\Downarrow$

$B_{\perp n}$ è formata da autovettori!

Dimostro (per induzione)

① Vera per $\mathbb{R}$ (come abbiamo visto)

② Suppongo vero per $\mathbb{R}^{n-1}$ e dimostriamo per $\mathbb{R}^n$.

$\Downarrow$

Sia α autovalore per $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

e v relativo ad α

$\Rightarrow T(v) = \alpha v$

$\Downarrow$

Considero $\langle\langle v \rangle\rangle = U$ (sottospazio generato da v)

$\Downarrow$

$\exists \; U^{\perp} \; / \; U \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \dim U^{\perp} = n-1$

$\Rightarrow$ Considero $T = T\big|_{U^{\perp}} \quad U^{\perp} \longrightarrow U^{\perp}$

L'IMMAGINE STA IN $U^{\perp}$ PERCHÉ $U^{\perp}$ È INVARIANTE PER T ESSENDO U INVARIANTE PER T

Per Hp induttiva, $\exists \; B^{U^{\perp}}_{\perp n} = B' \; /$

$$[T]_{B'} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$B^{\mathbb{R}^n}_{\perp n} = \underbrace{\left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\}}_{B_U} \cup B'$$

$\Downarrow$

Essendo v ortogonale ad ogni $v_i \in B'$

$\Downarrow$

v LI con B'

$$\Rightarrow [T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & & \beta_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Ogni operatore simmetrico è diagonalizzabile

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE:

$\Downarrow$

Ogni $\overbrace{\text{matrice simmetrica Reale}}^{A}$ è diagonalizzabile, cioè $\exists\ S\ (|S| \neq 0)\ /$

$$D = S^{-1} \cdot A \cdot S.$$

E Abbiamo dimostrato che S è ortogonale.

$\Downarrow$

SI DICE CHE:

Ogni matrice simmetrica Reale è

ORTOGONALMENTE

DIAGONALIZZABILE

$\Downarrow$

Viceversa: $\underbrace{\text{Se } A \text{ è OD}}$ $\Rightarrow$ A è simmetrica (ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE)

DIMOSTRAZIONE:

$\Downarrow$

$$\exists\ S\ /\ D = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

$\Downarrow$

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1} = S \cdot D \cdot S^{T}$$

$$\Rightarrow \underline{A^{T}} = (S \cdot D \cdot S^{T})^{T} = (S^{T})^{T} \cdot D^{T} \cdot S^{T} =$$

$$= S \cdot D \cdot S^{T} = \underline{A}$$

$$\Rightarrow A^{T} = A \Rightarrow A \text{ è simmetrica}$$

cvd

ABBIAMO COSÌ DIMOSTRATO IL SEGUENTE:

TEOREMA

Una matrice Reale è ortogonalmente $\boxed{\text{diagonalizzabile}}$

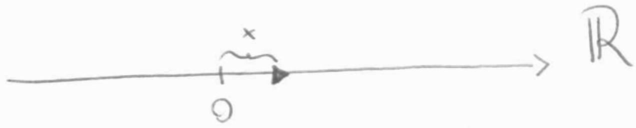
$\Updownarrow$

Essa è simmetrica

CLASSIFICAZIONE GEOMETRICA

In $\mathbb{R}$

$$T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$



$$\underbrace{x \longmapsto \alpha x}$$

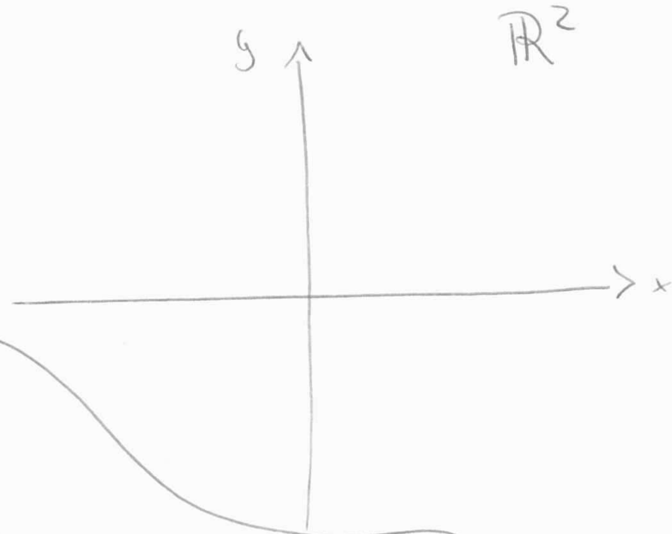
"OMOTETIA di rapporto α"

se $\alpha > 1 \Rightarrow$ "DILATAZIONE"

se $0 < \alpha < 1 \Rightarrow$ "CONTRAZIONE"

se $\alpha < 1 \Rightarrow$ "SPECCHIAMENTO"

In $\mathbb{R}^2$



$$\Rightarrow [T]_{B\perp n} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

Se $\beta = 0 \Rightarrow$ OMOTETIA lungo asse x di rapporto α

$\Downarrow$

Dato $v = x_1 e_1 + x_2 e_2$

$$\Rightarrow T(v) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) = x_1 \alpha e_1 = \alpha(x_1 e_1)$$

$\boxed{\text{Se } \alpha = 0 \text{ (Come sopra)}}$

⇓

In generale dato $V = x_1 e_1 + x_2 e_2$

⇓

$$\underbrace{T(v) = x_1 \alpha \cdot e_1 + x_2 \beta \cdot e_2}$$

Omotetie se entrambe le componenti di V di rapporti α e β e lungo i due assi

= Due omotetie contemporaneamente!

Se $\alpha = \beta$

⇒ le due componenti diventano α-volte i valori precedenti

⇓

V diventa α-volte sé stesso

Omotetia nel piano di rapporto α

Alla stessa matrice simmetrica posso associare

Forma quadratica (Congruenza)

⇓

Matrice diagonale

Operatore simmetrico (Similitudine)

⇓

Matrice diagonale

Punto di arrivo

La matrice di Dx e di Sx non sono uguali

↳ Ma gli indici d'inerzia sono invarianti