Def.: Sia V uno spazio vettoriale su un campo K, di dimensione n; $\Rightarrow$ si dice *forma quadratica*, $Q: V \to K$ UNA FORMA tale che soddisfi le seguenti condizioni:

1) $Q(\alpha v) = \alpha^2 Q(v) \quad \forall \alpha \in K$ e $v \in V$

2) la forma $F((v,w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$ è una forma bilineare simmetrica

Esempio: $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to x_1 x_2$ è forma quadratica

INFATTI:

1) $Q((\alpha v)) = Q\left(\left(\begin{matrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{matrix}\right)\right) = \alpha x_1 \cdot \alpha x_2 = \alpha^2 x_1 x_2 = \alpha^2 Q\left(\left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right)\right)$

2) $F((v,w)) = F\left(\left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right), \left(\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right)\right) = Q\left(\left(\begin{matrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{matrix}\right)\right) - Q\left(\left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right)\right) - Q\left(\left(\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right)\right) =$

$= (x_1+y_1)(x_2+y_2) - (x_1 x_2) - (y_1 y_2) = \cancel{x_1 x_2} + y_1 x_2 + x_1 y_2 + \cancel{y_1 y_2} - \cancel{x_1 x_2} - \cancel{y_1 y_2} =$

$= x_1 y_2 + y_1 x_2 = F((v,w))$

$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è bilineare? $\Rightarrow$ da verificare che $F((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w)) = \alpha_1 F((v_1,w)) + \alpha_2 F((v_2,w))$

Siano $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$; $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F\left(\left(\begin{matrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 \tilde{x}_1 \\ \alpha_1 x_2 + \alpha_2 \tilde{x}_2 \end{matrix}\right), \left(\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right)\right) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \tilde{x}_1) y_2 + (\alpha_1 x_2 + \alpha_2 \tilde{x}_2) y_1$

Inoltre

$\alpha_1 F\left(\left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right), \left(\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right)\right) + \alpha_2 F\left(\left(\begin{matrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{matrix}\right), \left(\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right)\right) = \alpha_1 (x_1 y_2 + x_2 y_1) + \alpha_2 (\tilde{x}_1 y_2 + \tilde{x}_2 y_1)$

sono uguali $\forall v_1, v_2, w \in V$ e $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$

$\Rightarrow$ Allo stesso modo si dimostra la linearità della seconda componente

$\Rightarrow$ La forma è bilineare

F è simmetrica? sì poiché la matrice associata è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

OSSERVAZIONE: entrambi i vettori canonici sono vettori isotropi per TALE F.

Data $Q: V \to K$ forma quadratica $\Rightarrow$ PER DEFINIZIONE è data una forma bilineare simmetrica F.

Voglio costruire un'altra forma bilineare F_Q simmetrica, a partire da Q, tale che $F_Q((v,v)) = Q(v) \quad \forall v \in V$: la forma bil. della definizione è così costruita:

$$F((v,w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w) \Rightarrow F((v,v)) = Q(2v) - Q(v) - Q(v) = 4Q(v) - 2Q(v) = 2Q(v)$$

$\Rightarrow$ se possiamo dividere per 2 $\Rightarrow F_Q((v,w)) = \frac{F((v,w))}{2}$ è tale che

$F_Q((v,v)) = \frac{F((v,v))}{2} = Q(v) \Rightarrow$ se lavoro in un campo K con $\mathrm{ch}K \neq 2$, POSSO DIVIDERE PER 2 $\Rightarrow$

$\exists\, F_Q((v,w)) \Rightarrow$ se lavoro su $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ O ALTRI CAMPI CON CARATTERISTICA $\neq 2$ $\Rightarrow$ posso associare alla f. quadratica

Q la forma bilineare $F_Q((v,w)) = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}$ tale che

$F_Q((v,v)) = Q(v)$; F_Q è detta POLARE di Q.

La forma bilineare polare di una f. quadratica Q è UNICA (da dimostrare)

Viceversa data una forma bilineare simmetrica $F: V\times V \to K$, K campo qualunq

$\Rightarrow$ è data una forma quadratica $Q_F: V \to K$ tale che
$v \mapsto F((v,v))$

$Q_F(v) = F((v,v))$

Q_F è forma quadratica; infatti:

1) $Q_F(\alpha v) = F((\alpha v, \alpha v)) = \alpha^2 F((v,v)) = \alpha^2 Q(v)$

2) $\tilde{F}((v,w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w) = F((v+w, v+w)) - F((v,v)) - F((w,w))$

$\tilde{F}$ è bilineare simmetrica? $\tilde{F}((v,w)) = \cancel{F((v,v))} + F((v,w)) + F((w,v)) + \cancel{F((w,w))} - \cancel{F((v,v))} - \cancel{F((w,w))}$

$\Rightarrow \tilde{F}((v,w)) = F((v,w)) + F((w,v))$; ma F è simmetrica; $\tilde{F}((v,w)) = 2F((v,w))$

$\Rightarrow \tilde{F}$ è bilineare simmetrica $\Rightarrow Q_F$ è quadratica

Conclusione: se K è campo con $\mathrm{ch}K \neq 2 \Rightarrow \exists$ applicazione biettiva φ (da dimostrare)

$$\varphi: \{F: V\times V \to K \text{ bil. simmetriche}\} \xrightarrow{\varphi} \{Q: V \to K \text{ forma quadrat.}\}$$

$$F \longmapsto Q_F$$

$$F_Q \xleftarrow[\varphi^{-1}]{} Q \qquad (\varphi^{-1}(\varphi(F)) = F \text{ e } (\varphi \circ \varphi^{-1})(Q) =$$

Fissata una base B_V in uno sp. vett V su $\mathbb{R} \Rightarrow$ data $F: V\times V \to \mathbb{R}$ f. bil. simm. posso associare la matrice $[F]_{B_V}$ tale che $F((v,w)) = [v]_{B_V}^T [F]_{B_V} [w]_{B_V}$

$\Rightarrow$ se considero $Q: V \to K$ f. quadratica avrò

$Q(v) = F_Q((v,v)) = [v]_{B_V}^T [F]_{B_V} [v]_{B_V} \Rightarrow Q$ e F_Q hanno dunque la stessa matrice associata in una base fissata.

ESEMPIO: se considero:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{costruisco } Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ fissata la base canonica in } \mathbb{R}^3$$

e costruisco anche $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che ha tale matrice nella base canonica.

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 + x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_1x_2 - x_2^2 + x_2x_3 + 3x_1x_3 + x_2x_3 =$$

$$= x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 \leftarrow Q$$

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + - x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2$$

$$F: \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 - x_2y_2 + x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2$$

$$Q: \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_1 - x_2^2 + x_2x_3 + 3x_3x_1 + x_3x_2$$

Scrivo la matrice associata in base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla F. quadratica

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2x_3$$

$$\Rightarrow [Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

POICHE', nell'esempio, $-2x_1x_2 = (a_{12} + a_{21})x_1x_2$,
$3x_2x_3 = (a_{23} + a_{32})x_2x_3$

$\Rightarrow$ POICHE' LA MATRICE DEVE ESSERE SIMMETRICA $\Rightarrow a_{12} = a_{21} = -\frac{2}{2}$ e

$a_{23} = a_{32} = \frac{3}{2}$