• 02/10/201

STUDIO DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEI SISTEMI LINEARI

↓

RISOLVERE I SISTEMI LINEARI

↓

METODO DI ELIMINAZIONE (DI GAUSS) → RISALE AGLI ANTICHI CINESI → SISTEMATO DA GAUSS (18C

- UTILIZZATO DAI COMPUTER NELLA RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI, ESSENDO UN VERO E PROPRIO ALGORITMO.
- RIDUZIONE A "GRADINI" UTILIZZANDO OPERAZIONI ELEMENTARI
  - SCAMBIO DI EQUAZIONI
  - MOLTIPLICAZIONE PER SCALARI E SOSTITUZIONE DELLA NUOVA EQUAZIONE
  - SOMMA MEMBRO A MEMBRO DI DUE EQUAZIONI DEL SISTEMA E SOSTITUZIONE DELL'EQUAZIONE COSÌ OTTENUTA AD UNA DELLE DUE EQUAZIONI DATE

1. RIORDINO DELLE VARIABILI SECONDO UN ORDINE PRESTABILITO
2. INDIVIDUAZIONE DELLA PRIMA VARIABILE NELLA PRIMA EQUAZIONE: SE NON È PRESENTE SCAMBIAMO 2 EQUAZIONI
3. RIMOZIONE DELLA PRIMA VARIABILE DALLE ALTRE EQUAZIONI

- ESEMPIO DI ~~UNA~~ SOSTITUZIONE DI UNA EQUAZIONE CON LA COMBINAZIONE LINEARE DELLA PRIMA EQUAZIONE E DELLA EQUAZIONE DA SOSTITUIRE:

$$\Sigma \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \end{cases}$$

IL COMPUTER ANALIZZA GLI SCALARI DELLA PRIMA EQUAZIONE E MOLTIPLICA LA SECONDA PER: $\left(-\frac{a_{11}}{a_{21}}\right)$

↓

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots = b_1 \\ -a_{11}x_1 - \frac{a_{11}\cdot a_{21}}{a_{21}}x_2 + \ldots = -\frac{a_{11}b_2}{a_{21}} \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots = b_1 \\ \left(a_{12} - \frac{a_{11}a_{21}}{a_{21}}\right)x_2 + \ldots = -\frac{a_{11}b_2}{a_{21}} + b_1 \end{cases}$$

ELIMINAZIONE, FINO ALLA FINE, DELLA PRIMA VARIABILE DEL SISTEMA DA TUTTE LE EQUAZIONI SUCCESSIVE, POI SI CONSIDERA IL SISTEMA OTTENUTO TOGLIENDO LA I EQUAZIONE E SI APPLICA NUOVAMENTE L'ALGORITMO SU QUESTO SISTEMA CON P-1 EQUAZIONI E n-1 VAR.

$$\Sigma' \begin{cases} c_{22}x_2 + \dots = d_2 \\ c_{32}x_2 + \dots = d_3 \\ c_{p2}x_2 + \dots = d_p \end{cases}$$

SISTEMA OTTENUTO DAL SISTEMA PRECEDENTE SENZA LA PRIMA EQUAZIONE E SENZA LA PRIMA INCOGNITA

L'ALGORITMO DI GAUSS COME PRECEDENTEMENTE FATTO, "ELIMINA" LA VARIABILE x_2 DALLE EQUAZIONI SUCCESSIVE ALLA PRIMA DI Σ';

L'ALGORITMO PREVEDE L'ELIMINAZIONE PROGRESSIVA DI TUTTE LE "PRIME" VARIABILI NELLE EQUAZIONI SUCCESSIVE ALLA PRIMA DI OGNI SISTEMA SUCCESSIVO.

Se $0 = d_n \rightarrow$ SISTEMA IMPOSSIBILE SE $d_n \neq 0$.

SE $\boxed{P = n} \Rightarrow \frac{a_{nn} x_n}{\cancel{a_{nn}}} = \frac{d_n}{a_{nn}}$ ESAURITE LE EQUAZIONI DI Σ, TERMINA LA FASE IN DISCESA DELL'ALGORITMO OTTENENDO UN SISTEMA RIDOTTO A GRADINI

↓

SI UTILIZZA POI LO STESSO ALGORITMO IN SALITA UTILIZZANDO LO STESSO PROCEDIMENTO EFFETTUATO IN PRECEDENZA PONENDO x_n COME PRIMA VARIABILE E L'ULTIMA EQUAZIONE COME LA PRIMA PER OGNI SUCCESSIVO SISTEMA.

$\boxed{\text{PIVOT}}$ DI UN SISTEMA: I PRIMI COEFFICIENTI NON NULLI NELLE EQUAZIONI DELLA FORMA A GRADINI DEL SISTEMA

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$: SI DICE RANGO DI UN SISTEMA LINEARE Σ IL NUMERO DEI SUOI PIVOT

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$: SE Σ È UN SISTEMA LINEARE DI P EQUAZIONI ED n INCOGNITE IL NUMERO DELLE SOLUZIONI DI Σ, AMMESSO CHE NE ABBIA, È $\infty^{n - \text{Rango di } \Sigma}$

↓

ANCHE SE IL NUMERO DI EQUAZIONI NON È PARI AL NUMERO DI VARIABILI È POSSIBILE SPOSTARE AL SECONDO MEMBRO LE VARIABILI LIBERE (LE VARIABILI LEGATE SONO INVECE CONNESSE AI PIVOT) CHE DIVENTANO PARAMETRI.

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO
DI 2 EQUAZIONI IN 3 VARIABILI

$$\Sigma \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$2E_{q_1} + E_{q_2} \to E_{q_2}$$

(COMBINAZIONE LINEARE)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ \quad -x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

2 PIVOT

rango di $\Sigma = rg\,\Sigma = 2$

$\Rightarrow \Sigma$ ha ∞^{3-2} soluzioni $\to \infty^1$ DIMENSIONE DI UNA RETTA

2 VARIBILI LEGATE (x_1, x_2)

1 VARIABILE LIBERA (x_3)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 + 2 \\ \quad -x_2 = -2x_3 + 7 \end{cases}$$

$$E_{q_1} - E_{q_2} \to E_{q_1}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 5 \\ -x_2 = -2x_3 + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 5 \\ x_2 = 2x_3 - 7 \end{cases}$$

$$Sol\,\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_3 - 5,\ x_2 = 2x_3 - 7,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$Sol\,\Sigma = \{(x_3 - 5, 2x_3 - 7, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

È NECESSARIO DIMOSTRARE CHE I SISTEMI OTTENUTI DURANTE LO SVILUPPO DEL METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS SONO EQUIVALENTI, CIOÈ HANNO LO STESSO INSIEME DI SOLUZIONI.

$\Downarrow$

IL SISTEMA È STATO MODIFICATO ATTRAVERSO L'APPLICAZIONE DELLE OPERAZIONI ELEMENTARI

$\Downarrow$

QUINDI È NECESSARIO DIMOSTRARE CHE LE OPERAZIONI ELEMENTARI MUTANO SISTEMI IN SISTEMI EQUIVALENTI

CIOÈ SE LA n-UPLA $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ È SOLUZIONE DEL SISTEMA $\Sigma \Rightarrow \tilde{X}$ È SOLUZIONE DEL SISTEMA Σ' OTTENUTO DA Σ MEDIANTE OPERAZIONI ELEMENTARI

DIMOSTRAZIONE

DIMOSTRIAMO LA PROPOSIZIONE CONSIDERANDO UN'OPERAZIONE ALLA VOLTA, RISCRIVIAMO IL SISTEMA LASCIANDO I II MEMBRI UGUALI A ZERO

$$\Rightarrow \Sigma \begin{cases} Eq^{(1)}(X) = 0 \\ Eq^{(2)}(X) = 0 \\ Eq^{(i)}(X) = 0 \\ Eq^{(j)}(X) = 0 \\ Eq^{(p)}(X) = 0 \end{cases} \qquad \text{CON } X = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\Rightarrow \text{SE } \tilde{X} \text{ È SOLUZIONE} \Rightarrow \begin{cases} Eq^{(1)}(\tilde{X}) = 0 \\ Eq^{(2)}(\tilde{X}) = 0 \\ \vdots \\ Eq^{(i)}(\tilde{X}) = 0 \\ Eq^{(j)}(\tilde{X}) = 0 \\ \vdots \\ Eq^{(p)}(\tilde{X}) = 0 \end{cases}$$

LO <u>SCAMBIO DI EQUAZIONI</u> TRASFORMA Σ IN Σ'

CON $\Sigma' = \begin{cases} Eq^{(1)}(\tilde{x}) = 0 \\ Eq^{(2)}(\tilde{x}) = 0 \\ Eq^{(j)}(\tilde{x}) = 0 \\ Eq^{(i)}(\tilde{x}) = 0 \\ Eq^{(p)}(\tilde{x}) = 0 \end{cases}$

PER IL QUALE $\tilde{x}$ È ANCORA SOLUZIONE PERCHÈ LE EQUAZIONI SONO ANCORA LE STESSE

LA <u>MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE</u> α DI UN'EQUAZIONE $Eq^{(i)}(x)$ DEL SISTEMA E LA RELATIVA SOSTITUZIONE TRASFORMA Σ IN Σ'

CON $\Sigma' = \begin{cases} Eq^{(1)}(\tilde{x}) = 0 \\ Eq^{(2)}(\tilde{x}) = 0 \\ \alpha \cdot Eq^{(i)}(\tilde{x}) = 0 \\ Eq^{(j)}(\tilde{x}) = 0 \\ Eq^{(p)}(\tilde{x}) = 0 \end{cases}$

$\alpha \cdot Eq^{(i)}(\tilde{x}) = 0$ perchè

$Eq^{(i)}(\tilde{x}) = 0 \quad (\alpha \cdot 0 = 0)$

$\Rightarrow \tilde{x}$ È SOLUZIONE ANCHE DI Σ'

COME <u>TERZA OPERAZIONE</u> SOSTITUISCO $Eq^{(i)}(x)$ CON $Eq^{(i)}(x) + Eq^{(j)}(x)$ CHE TRASFORMA Σ IN Σ'

CON $\Sigma' = \begin{cases} Eq^{(1)}(x) = 0 \\ Eq^{(2)}(\tilde{x}) = 0 \\ Eq^{(i)}(\tilde{x}) + Eq^{(j)}(x) = 0 \\ Eq^{(j)}(\tilde{x}) = 0 \\ Eq^{(p)}(\tilde{x}) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow Eq^{(i)}(\tilde{x}) + Eq^{(j)}(\tilde{x}) = 0$

perchè

$Eq^{(i)}(\tilde{x}) = 0 \wedge Eq^{(j)}(\tilde{x}) = 0$

C.V.D.