3/04/2019

Data la forma quadratica $Q: V \to K$, $ch K \neq 2$, $\Rightarrow$ la sua forma polare è unica: TALE FORMA POLARE È UNA FORMA BILINEARE F_Q TALE CHE $F_Q: V \times V \to K$ t.c. $F_Q((v,w)) = \dfrac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}$ e

$$F_Q((v,v)) = Q(v).$$

Supponiamo che $\exists\, G: V \times V \to K$ f bilineare simmetrica t.c. $G((v,v)) = Q(v)$

$$Q(v+w) = G((v+w, v+w)) = G((v, v+w)) + G((w, v+w)) = G((v,v)) +$$
$$+ G((v,w)) + G((w,v)) + G((w,w))$$

n.b.: è simmetrica $\Rightarrow$

$$\Rightarrow Q(v,w) = Q(v) + 2G((v,w)) + Q(w) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G((v,w)) = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2} \quad \forall v, w \in V$$

$$\quad \| \quad F_Q((v,w))$$

C.V.D.

Estendiamo alle forme quadratiche le definizioni date per le forme bilineari simmetriche:

1) Q è definita POSITIVA se $Q(v) > 0 \ \forall v \neq 0$
2) Q è definita NEGATIVA se $Q(v) < 0 \ \forall v \neq 0$
3) Q è ~~def~~ positiva se $Q(v) \geq 0 \ \forall v \neq 0$
4) Q è negativa se $Q(v) \leq 0 \ \forall v \neq 0$
5) Q è indeterminata altrimenti

Teorema di Silvester o teorema di inerzia per le forme quadratiche reali

Data una forma bilineare simmetrica $F: V \times V \to \mathbb{R}$ con V spazio REALE vettoriale n-dimensionale $\Rightarrow \exists$ una base di V, B_V, F-ortogonale, t.c.

$$[F]_{B_V} = \begin{array}{c} \\ p \\ \\ r \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

supponendo che $rg F = r$.

cioè: $a_{ii} = 1 \quad \forall\, i = 1, \dots, p$; le altre entrate sono tutte 0

$a_{jj} = -1 \quad \forall\, j = p+1, \dots, r$

$a_{kk} = 0 \quad \forall\, k = r+1, \dots, n$

Inoltre si dimostra che

p e $q = r - p$ sono invarianti di F
e quindi di Q_F

p è detto <u>indice di inerzia POSITIVO</u>

q è detto <u>indice di inerzia NEGATIVO</u>

La coppia (p, q) è detta SEGNATURA della f quadratiche Q_F

Dimostrazione:

Sia $\tilde{B}_V$ una base F-ortogonale di V $\Rightarrow [F]_{\tilde{B}_V} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$

posso posizionare i vettori di $\tilde{B}_V$ in modo che $a_{ii} > 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, p$

$a_{jj} < 0 \quad \forall\, j = p+1, \dots, r$

$a_{kk} = 0 \quad \forall\, k = r+1, \dots, n$

$\Rightarrow$ siano $\alpha_i \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha_i^2 = a_{ii} \quad \forall\, i = 1, \dots, p$

$\beta_j \in \mathbb{R}$ t.c. $\beta_j^2 = -a_{jj} \quad \forall\, j = p+1, \dots, r$

Prendo una nuova base $B_V = \left\{ \frac{v_1}{\alpha_1}, \frac{v_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{v_p}{\alpha_p}, \frac{v_{p+1}}{-\beta_{p+1}}, \dots, \frac{v_r}{-\beta_r}, v_{r+1}, \dots, v_n \right\}$

essendo $\tilde{B}_V = \{ v_1, \dots, v_n \}$

$\Rightarrow$ costruisco $[F]_{B_V} = $

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ p+1 \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{pmatrix} F\left(\left(\frac{v_1}{\alpha_1}, \frac{v_1}{\alpha_1}\right)\right) & & & & & & 0 \\ & F\left(\left(\frac{v_2}{\alpha_2}, \frac{v_2}{\alpha_2}\right)\right) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & F\left(\left(\frac{v_{p+1}}{-\beta_{p+1}}, \frac{v_{p+1}}{-\beta_{p+1}}\right)\right) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & F\left(\left(\frac{v_r}{-\beta_r}, \frac{v_r}{-\beta_r}\right)\right) & \\ & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & F((v_n, v_n)) \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \\ p+1 \\ \vdots \\ r \\ r+1 \\ \\ n
\end{array}
\begin{pmatrix}
\frac{1}{\alpha_1^2}F((v_1,v_1)) & & & & & & & & \\
& \frac{1}{\alpha_2^2}F((v_2,v_2)) & & & & & & 0 & \\
& & \ddots & & & & & & \\
& & & \frac{1}{\alpha_p^2}F((v_p,v_p)) & & & & & \\
& & & & \frac{1}{\beta_{p+1}^2}\underbrace{F((v_{p+1},v_{p+1}))}_{=-\beta_{p+1}^2} & & & & \\
& 0 & & & & \ddots & & & \\
& & & & & & -1 & & \\
& & & & & & & F((v_{r+1},v_{r+1})) & \\
& & & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}
=
\begin{array}{c}
\\ \\ p \\ p+1 \\ \vdots \\ r \\ r+1 \\ \vdots \\ n
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & 0 & \\
& & 1 & & & & & \\
& & & -1 & & & & \\
& 0 & & & \ddots & & & \\
& & & & & -1 & & \\
& & & & & & 0 & \\
& & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & 0
\end{pmatrix}
$$

perché sono gli stessi vettori che avevamo nell'altra base.

Invarianza di p:

Supponiamo, per assurdo, che non lo sia (invariante)

Supponiamo che $\exists B_1$ base di V F-ortogonale $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$

t.c. se $[F]_{B_1} = (a_{ij}) \Rightarrow a_{ii} > 0 \ \forall i = 1, \dots, p$ e $a_{jj} < 0 \ \forall j = p+1, \dots, r$

sempre con $r = rg F$

e una base $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$, base F-ortogonale di V, t.c. posto

$[F]_{B_2} = (b_{hk}) \Rightarrow b_{hh} > 0 \ \forall h = 1, \dots, t$ e $b_{kk} < 0 \ \forall k = t+1, \dots, r$

con $t \neq p$ ← è qui l'assurdo

[Supponiamo che $t < p \Rightarrow$ considero i sottospazi di V

$U = \langle\langle v_1, \dots, v_p \rangle\rangle$ e $W = \langle\langle w_{t+1}, \dots, w_n \rangle\rangle \Rightarrow \dim U = p$ e $\dim W = n-t$

per il teorema di Grassmann: $\dim(U+W) = \underset{p}{\underset{\parallel}{\dim U}} + \underset{n-t}{\underset{\parallel}{\dim W}} - \dim(U \cap W)$

$\Rightarrow p+n-t > n \Rightarrow \dim(U \cap W) > 0$

$\Rightarrow$ sia $u \in \mathcal{U} \cap W$, $u \neq 0 \Rightarrow u \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow u = \sum_{i=1}^{p} a_i v_i$ e inoltre $u \in W$

$\Rightarrow u = \sum_{j=t+1}^{n} b_j w_j$

$$F((u,u)) = F\left(\left(\sum a_i v_i, \sum a_i v_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 F((v_i, v_i)) > 0$$

>0 vedi prima perché >0

ORA CONSIDERO $u \in W \Rightarrow F((u,u)) = F\left(\left(\sum_{j=t+1}^{n} b_j w_j, \sum_{j=t+1}^{n} b_j w_j\right)\right) =$

$$= \sum_{j=t+1}^{n} b_j^2 F((w_j, w_j)) < 0$$

>0 vedi prima perché <0, PER COME HO PRESO I VETTORI DELLA BASE B_2

u ha immagine >0 e <0 con la stessa applicazione

$\Rightarrow$ impossibile

L'assurdo è AVER SUPPOSTO $\boxed{t < p}$

Allora è possibile $t > p$ (sempre per assurdo)

La dimostrazione è la stessa di prima e si arriva a dire che $t \not> p$

$\Rightarrow$ L'unico caso possibile è $t = p$

c.v.d

Sia $Q: V \to \mathbb{R}$, ad esempio $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x_1^2 - 2x_1 x_2$ $\Rightarrow \exists$ basi F_Q-ortogonali di $\mathbb{R}^2$, B, t.c. $[F_Q]_B = [Q]_B =$

$[Q]_B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix}$ con $a_{1,1}$ e $a_{2,2}$ positivi (supponiamo)

$\Rightarrow Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = a_{1,1} y_1^2 + a_{2,2} y_2^2$ per il teorema di Silvester:

$\exists$ base $\tilde{B}$ di V t.c. $Q\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1^2 + z_2^2$

(AD ESEMPIO)

LA FORMA QUADRATICA È RIDOTTA AD UNA SOMMA ALGEBRICA DI QUADRATI: DICIAMO CHE È RIDOTTA A FORMA CANONICA

Sia $Q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ f quadratica con segnatura $(2,1)$

positivo negativo

$\Rightarrow$ so che posso dare a Q una forma canonica che sarà:

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$