Dato $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SIMMETRICO $\to$ AUTOVETTORI RELATIVI AD AUTOVALORI DIVERSI SONO ORTOGONALI.

DIMOSTRO:

$$v_1 \to T(v_1) = \lambda_1 v_1 \quad v_1 \neq 0$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$v_2 \to T(v_2) = \lambda_2 v_2 \quad v_2 \neq 0$$

$$T(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot T(v_2)$$

$$(\lambda_1 v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot (\lambda_2 v_2)$$

$$\lambda_1 (v_1 \cdot v_2) = \lambda_2 (v_1 \cdot v_2)$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 \cdot v_2) = 0 \Rightarrow v_1 \cdot v_2 = 0$$

cvd

DATO $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SIMMETRICO $\to$ SE $U < \mathbb{R}^n$ È INVARIANTE PER T ALLORA $U^\perp$ È SOTTOSPAZIO INVARIANTE PER T.

DIMOSTRO:

$$v \in U \qquad w \in U^\perp \qquad T(v) \in U$$

TESI: $T(w) \in U^\perp \quad \forall w \in U^\perp$

$$\underbrace{T(v) \cdot w}_{=0} = v \cdot T(w) \Rightarrow v \cdot T(w) = 0 \Rightarrow T(w) \in U^\perp$$

c.v.d.

TEOREMA DI STRUTURA PER GLI OPERATORI SIMMETRICI:

DATO $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SIMMETRICO $\Rightarrow \exists\, B_{\perp_n}$ BASE DI $\mathbb{R}^n$ TALE CHE $[T]_{B_{\perp_n}} = D$

DIMOSTRAZIONE: PER INDUZIONE SU n

1) VERIFICA PER $n=1$: $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \alpha x$ $\Rightarrow [T]_C \Rightarrow (\alpha)$

2) SUPPONIAMO VERO IL TEOREMA FINO ALLA DIMENSIONE $n=k$ E LO DIMOSTRIAMO PER $n=k+1$:

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE MATRICI SIMMETRICHE REALI HANNO SOLO AUTOVALORI REALI $\Rightarrow \exists$ ALMENO UN AUTOVALORE REALE λ PER T E QUINDI SIA $v \neq 0$ AUTOVETTORE RELATIVO A λ CIOÈ $T(v) = \lambda v \Rightarrow$ CONSIDERO $\langle\langle v \rangle\rangle < \mathbb{R}^{k+1}$ SOTTOSPAZIO INVARIANTE PER T, 1-DIMENSIONALE. $\Rightarrow$ PER QUANTO DIMOSTRATO $\langle\langle v \rangle\rangle^\perp$ È INVARIANTE PER T, CIOÈ $T|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp} : \langle\langle v \rangle\rangle^\perp \to \langle\langle v \rangle\rangle^\perp$

E $T|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp} = T$ SU SOTTOSPAZIO CONSIDERATO $\langle\langle v \rangle\rangle^\perp$ E QUINDI È SIMMETRICO SU UNO SPAZIO k-DIMENSIONALE. $\Rightarrow \exists\, B'_{\perp_n}$ DI $\langle\langle v \rangle\rangle^\perp$

TALE CHE $\left[T|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp}\right]_{B'_{\perp_n}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} \Rightarrow$ SO CHE $\langle\langle v \rangle\rangle \oplus \langle\langle v \rangle\rangle^\perp = \mathbb{R}^{k+1}$

QUINDI $\left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\} \cup B'_{\perp_n}$ = BASE DI $\mathbb{R}^{k+1} = B_{\perp_n}$

$B_{\perp_n}$ È ORTONORMALE PERCHÉ I VETTORI SONO NORMALIZZATI E $\frac{v}{\|v\|}$ È ORTOGONALE AGLI ALTRI POICHÉ STA IN $(\langle\langle v \rangle\rangle^\perp)^\perp$ ALLORA:

$$[T]_{B_{\perp_n}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

c.v.d.

PROPOSIZIONE (COROLLARIO DEL TEOREMA): OGNI MATRICE SIMMETRICA REALE È ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE (TEOREMA SPETTRALE).

VICEVERSA OGNI MATRICE REALE ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE È SIMMETRICA.

DIMOSTRO:

SIA A LA MATRICE $\Rightarrow \exists\ S$ ORTOGONALE TALE CHE $D = S^{-1} A S = S^T A S$

$\Rightarrow SD = SS^{-1}AS \Rightarrow SDS^{-1} = SS^{-1}ASS^{-1}\ (SS^{-1} = I) \Rightarrow A = SDS^{-1}$

$A = SDS^T \qquad A^T = (SDS^T)^T = (S^T)^T D^T S^T = SDS^T = A \Rightarrow A^T = A$

c.v.d.

SIA $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ SIMMETRICA $\Rightarrow \exists\ T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SIMMETRICO t.c. $[T]_{B_{\perp_n}} = A$

$\Rightarrow \exists\ Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ FORMA QUADRATICA t.c. $[Q]_{B_{\perp_n}} = A$

SAPPIAMO CHE $\exists\ \tilde{B}_{\perp_n}$ t.c. $\exists\ S$ INVERTIBILE ORTOGONALE E D DIAGONALE t.c. $D = S^{-1}AS$ E CHE $\exists\ \hat{B}_{\perp_n}$ E UNA MATRICE $\hat{D}$ t.c. $\hat{D} = S^TAS$

$\Rightarrow$ ESSENDO S ORTOGONALE $\Rightarrow D = S^TAS$ E DUNQUE $D = \hat{D}$ È LA MATRICE CHE MI DÀ LA FORMA CANONICA DELLA FORMA QUADRATICA

IL LEGAME TRA L'OPERATORE T E LA FORMA QUADRATICA Q ASSOCIATE ALLA STESSA MATRICE È IL SEGUENTE: $Q(v) = T(v) \cdot v$

INFATTI SE $[v]_{B_{\perp_n}} = X$ E $[T(v)]_{B_{\perp_n}} = [T]_{B_{\perp_n}} [v]_{B_{\perp_n}} = AX \Rightarrow$

$T(v) \cdot v = (AX)^T \cdot I \cdot X = X^T A^T \cdot I \cdot X = X^T A X = Q(v)$

DIAGONALIZZO A MEDIANTE S ORTOGONALE $\Rightarrow [v]_{\hat{B}_{\perp_n}} = SX$

$[T(v)]_{\hat{B}_{\perp_n}} = [T]_{\hat{B}_{\perp_n}} [v]_{\hat{B}_{\perp_n}} = DSX \Rightarrow \cancel{(DSX)^T \cdot I \cdot X = X^T S^T D^T I X = X^T S^T D S X}$

$(DSX)^T \cdot I \cdot SX = X^T S^T D^T \cdot I \cdot SX = X^T S^T D S X \Rightarrow A \sim D \Rightarrow D$ È LA MATRICE DIAGONALE CHE DEFINISCE LA FORMA CANONICA DELLA FORMA QUADRATICA

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEGLI OPERATORI SIMMETRICI IN $\mathbb{R}^n$

1) $n=1$ $\quad T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \alpha x$

OMOTETIA DI RAPPORTO α

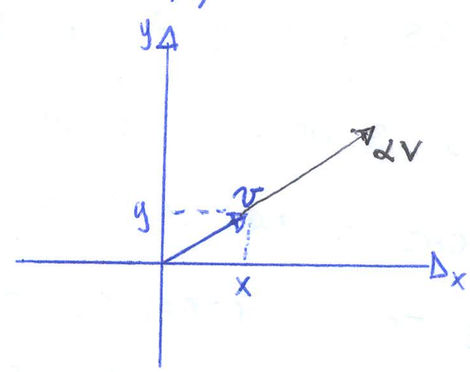
- SE $\alpha > 1 \Rightarrow T$ È UNA DILATAZIONE
- SE $0 < \alpha < 1 \Rightarrow T$ È UNA CONTRAZIONE
- SE $\alpha < 0 \Rightarrow$ " SIMMETRIE RISPETTO ALL'ORIGINE E LORO COMPOSIZIONI CON DILATAZIONI O CONTRAZIONI

2) $n=2$ $\quad T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists B_{\perp n}$ t.c. $[T]_{B_{\perp n}} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

OMOTETIA DI RAPPORTO α NEL PIANO



$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ y \end{pmatrix}$ OMOTETIA DI RAPPORTO α LUNGO L'ASSE X

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \beta y \end{pmatrix}$ OMOTETIA DI RAPPORTO β LUNGO L'ASSE y

QUINDI $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ COMPOSIZIONI DI OMOTETIE LUNGO GLI ASSI COORDINATI

STESSI RISULTATI PER $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SIMMETRICO

Definizione: SI DICE QUADRICA IN $\mathbb{R}^n$ IL LUOGO DEI PUNTI LE CUI COORDINATE SODDISFANO UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0$$

DOVE $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X$ È VETTORE GENERICO DI $\mathbb{R}^n$
VETTORE DELLE COORDINATE DI $\mathbb{R}^n$

E $a_{ij}, b_k, c \in \mathbb{R} \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = X^T A X \Rightarrow (a_{ij}) = A \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k x_k = B^T X = (b_1, \dots, b_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE L'EQUAZIONE MATRICIALMENTE:

$$X^T A X + B^T X + c = 0$$

QUADRICA IN $\mathbb{R}$: $ax^2 + bx + c = 0$ (2 PUNTI REALI o 2 PUNTI COMPLESSI)

QUADRICA IN $\mathbb{R}^2$: $a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ CURVE NEL PIANO DETTE CONICHE

QUADRICA IN $\mathbb{R}^3$: $a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0$