LEZIONE 3/10/18

Vogliamo associare matrici ad un sistema lineare:

Definizione: una MATRICE di numeri è una tabella di numeri ordinata in righe e colonne

Esempio:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sqrt{2} & 4 & -5 \end{pmatrix} \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$ Matrice rettangolare con 2 righe e 3 colonne cioè una matrice 2×3

2) Matrice 3×4 reale: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & \pi & 3{,}24 \\ 2 & \sqrt{2} & 1/2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times4}$

3) Matrice 3×3: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$

Le matrici con lo stesso numero di righe e colonne si chiamano matrici quadrate

Gli elementi della matrice si chiamano ENTRATE della matrice.

Le matrici si indicano con lettere maiuscole.

$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}}$ $\qquad \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

Esempio: data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3\times3}$ qual è l'entrata a_{23}?

L'elemento a_{23} è 6.

Sia $\Sigma : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ associamo a Σ la "MATRICE DEI COEFFICIENTI" o "MATRICE INCOMPLETA":

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nella matrice compaiono i coefficienti delle variabili delle equazioni del sistema

Si associa una seconda matrice, la "MATRICE COMPLETA" di Σ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Nell'ultima colonna compaiono anche i termini noti delle equazioni

VICEVERSA SI PUÒ ASSOCIARE UN SISTEMA LINEARE AD UNA MATRICE: ESEMPIO:

Data $A \in \mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$; $A = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$ posso associare il sistema $-x_1 = 2$

Sia $\Sigma : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 \qquad + x_3 = 1 \end{cases}$ associo $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ ~~R2x4~~

Metodo di eliminazione di Gauss ESEGUITO con le RIGHE DELLA MATRICE ASSOCIATA, INVECE CHE CON LE EQUAZIONI DEL SISTEMA

$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $R_1 + R_2 \to R_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$ FORMA A GRADINI

-1 e 2 sono PIVOT della matrice e del sistema

Il RANGO di Σ e della matrice associata è 2

Σ ha soluzioni e sono $\infty^{3-2} = \infty^1$

$R_1 - R_2 \to R_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} -R_1 \to R_1 \\ \frac{1}{2} R_2 \to R_2 \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$

DEF: Forma a gradini CANONICA (i PIVOT sono tutti 1)

Le operazioni (EFFETTUATE) con le righe della matrice si chiamano OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA

Associo alla matrice finale in forma a gradini CANONICA il sistema

$$\Sigma' : \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 + 1 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Definizione: matrici ottenute l'una dall'altra mediante operazioni elementari riga si dicono EQUIVALENTI

L'equivalenza tra matrici in $M_{p \times n}(\mathbb{R})$ è una relazione di equivalenza.

Una relazione di equivalenza è una relazione tra oggetti di un insieme che gode di 3 proprietà:

1) Proprietà riflessiva

$\Downarrow$

Ogni oggetto A è equivalente a se stesso

$A \sim A \quad \forall A \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$

2) Prop. simmetrica

$\Downarrow$

Dati due oggetti A e B

$A, B \in$ insieme

se $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

3) Prop. transitiva

$\Downarrow$

Dati tre oggetti $A, B, C \in$ insieme

se $A \sim B$ e $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

~~Proposizione:~~ Dimostrazione dell'equivalenza tra matrici come relazione di equivalenza:

La proprietà 1) è verificata cioè $A \sim A \ \forall A \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ perché A è ottenuta da A mediante la moltiplicazione per $\alpha = 1$ di ogni riga

La proprietà 2) è se $A \sim B \Rightarrow B \sim A \ \forall A, B \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$.
Per ipotesi B è ottenuta da A mediante operazioni elementari riga.
Se in B la i-esima riga è ottenuta come $R_i(A) + R_j(A) = R_i(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ posso ottenere A sostituendo la i-esima riga di B con $R_i(B) - R_j(B)$.
$R_j(A) = R_j(B)$ perché soltanto la i-esima riga viene modificata.

Proprietà 3) se $A \sim B$ e $B \sim C \Rightarrow A \sim C \ \forall A, B, C \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ PER CASA