Sia $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operatore associato in $\mathcal{E}$ alla matrice $[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

- determinare i suoi <u>autospazi</u>

- cerco gli autovalori dal polinomio caratteristico

$$\left| [T]_{\mathcal{E}} - \lambda I \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(-\lambda\cdot(4-\lambda)-2\right) + 2(4-\lambda) - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{(1-\lambda)(-\lambda)(4-\lambda) = 0}$$

gli autovalori sono: $\lambda = 1$; $\lambda = 0$; $\lambda = 4$

con molteplicità: $\mu(1) = 1$; $\mu(0) = 1$; $\mu(4) = 1$

- ~~E~~ ora si cerca autospazio E_1: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ → matrice che ottengo sostituendo $\lambda = 1$ alla matrice $([T]_{\mathcal{E}} - \lambda I)$

→ matrice associata al sistema lineare omogeneo

$\to \underline{rg = 2} \Rightarrow \boxed{\dim E_1 = 1}$

↳ retta!

<u>SISTEMA</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

RETTA ~~RETTA~~ PASSANTE PER L'ORIGINE

↳ <u>AUTOSPAZIO E_1</u>

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2} z \\ x = \frac{5}{2} z \end{cases} \qquad E_1 = \left\langle\!\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle\!\right\rangle$$

- cerco E_0: $\longrightarrow \boxed{E_0 = \operatorname{Ker} T}$: quando ho un autovalore nullo per cercare l'autospazio corrispondente mi basta cercare il nucleo di T

cerco il nucleo dell'applicazione

$$\hookrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \to E_0 = \operatorname{Ker} T = \left\langle\!\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\!\right\rangle$$

- cerco E_4: $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ $E_4: \begin{cases} -x-4y+z=0 \\ \cancel{2}y=0 \end{cases}$

$E_4 = \langle\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle\rangle$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$

<u>Proposizione</u>: Sia $T: V \to V$ operatore, λ un autovalore ed E_λ il relativo autospazio $\Rightarrow$ $\boxed{\dim E_\lambda \leq \mu(\lambda)}$

<u>Dimostrazione</u>: supponiamo che $\dim E_\lambda = k \leq \dim V = n$

sia $B_{E_\lambda} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ base di E_λ, completo ad una base di V: $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_k, \dots, w_{n-k}\}$

$\Rightarrow$ pongo il mio autovalore $\lambda = \lambda_0$

$\Rightarrow$ la matrice $[T]^{B_V}_{B_V} = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots \\ y_2 & \\ \vdots & \\ y_n & \end{pmatrix}$ Ricordando che $T(v_1) = \lambda_0 v_1$

$v_1 = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n w_{n-k}$ (v_1 espresso come comb. lineare della nuova base)

$T(v_1) = \left[\lambda_0 v_1 = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n w_{n-k} = \lambda_0 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 w_{n-k} \right]$ esprimo il vettore immagine come comb. lineare dei vettori di base B_V

$[T]^{B_V}_{B_V} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_0 & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & \lambda_0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$ le righe saranno fatte così fino alla k-esima colonna!

↑ k-esima colonna

riscrivo $[T]^{B_V}_{B_V} =$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \to \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \lambda_0 & a_{k,k+1} & & a_{k,n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ 0 & 0 & & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}_{n \times n} = A \Longrightarrow |A - \lambda I|$$

(column k marked above the matrix)

$$|A-I\lambda| = \begin{vmatrix} \lambda_0-\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0-\lambda & \cdots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ & & & \lambda_0-\lambda & & & a_{k,n} \\ 0 & 0 & & 0 & a_{k+1,k+1}-\lambda & \cdots & \\ 0 & \cdots & & 0 & a_{nk+1} & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_0-\lambda)^K \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1}-\lambda & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \boxed{(\lambda_0-\lambda)^K \cdot p(\lambda)}$$

– con $p(\lambda)$ polinomio in λ di grado $n-k$

→ conclusione $\underline{\mu(\lambda_0) \geq K}$

POICHÈ $p(\lambda)$ può avere ancora λ_0 come radice !

$\Rightarrow \mu(\lambda_0) \geq \dim E_{\lambda_0}$!

c.v.d

Sia $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(x,y) \longmapsto (x+y, -3x-y, 2y)$$
$$\qquad\qquad\quad\; \| $$
$$\qquad\qquad (x', y', z')$$

Voglio una matrice associata a T

$\Rightarrow$ fisso le basi

prendo una base di $\mathbb{R}_2$: $B_{\mathbb{R}_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

e una base di $\mathbb{R}_3$: $B_{\mathbb{R}_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

ovviamente vettori di base lin. ind. !

→ CERCO $[T]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}} \in \mathcal{M}_{3\times 2}$ → $3 = \dim(\text{CODOMINIO})$
$2 = \dim(\text{DOMINIO})$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

questi vettori li voglio vedere come combinazione lineare dei vettori della base di $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

α, β, γ saranno le nuove coord nel nuovo sist. di rif del vettore $(1,-1)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice $[T]^{B_{\mathbb{R}^3}}_{B_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \\ \gamma & \gamma_1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ che si OTTIENE RISOLVENDO

IL SISTEMA ASSOCIATO:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \dots$$