GEOMETRIA (~~E ALGEBRA LINEARE~~) 4/12/2018

FASCIO DI PIANI NELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE DI BASE I PIANI $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ E $\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ È DATO DALLE COMBINAZIONI LINEARI DI TALI PIANI E HA EQUAZIONE

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

FASCIO -> DIPENDE DA DUE PARAMETRI α e β REALI

CON $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, α,β NON ENTRAMBI NULLI

SUPPOSTO $\alpha\neq 0$ POSSIAMO DIVIDERE PER α E OTTENIAMO $a_1x+b_1y+c_1z+d_1+k(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$
IN QUESTO CASO PERDIAMO UN PIANO DAL FASCIO (IN QUESTO CASO È π_2)

CONSIDERO $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$ RAGIONIAMO SULLE POSSIBILI SOLUZIONI -> RAGIONANDO QUINDI SUL RANGO DI Σ ABBIAMO DUE POSSIBILITÀ

• DETTO Σ_0 IL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO $\Rightarrow rg\,\Sigma_0 = \begin{cases} 1 \Rightarrow rg\,\Sigma = \begin{cases} 1 \Rightarrow \text{UNA RIGA È LIN. INDIPENDENTE} \to \text{sol } \Sigma \text{ è il PIANO } \pi_1=\pi_2 \ (1) \ (*) \\ 2 \ (✱) \end{cases} \\ 2 \Rightarrow rg\,\Sigma = 2 \Rightarrow \text{sol } \Sigma \text{ è UNA RETTA} \end{cases}$

✱ se $rg\,\Sigma=2 \Rightarrow \nexists$ sol Σ e $\pi_1 // \pi_2$ $\boxed{\square}$

LO SPAZIO È AFFINE E HA DIMENSIONE $3-2=1$

IL FASCIO È DETTO PROPRIO E TUTTI I SUOI PIANI PASSANO PER TALE RETTA (RETTA IN COMUNE A TUTTI I PIANI DEL FASCIO) $\longrightarrow$ TALE RETTA È DETTA <u>ASSE</u> DEL FASCIO

• SE ANALIZZIAMO IL CASO $(*)$ $\Rightarrow$ L'EQUAZIONE DI π_2 È MULTIPLO DELL'EQUAZIONE DI π_1

$$\Rightarrow \alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta\gamma(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)=0 \Rightarrow \underset{\text{RACCOLGO}}{(\alpha+\beta\gamma)}(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)=0$$

QUALUNQUE SIANO α e β QUESTA EQUAZIONE RAPPRESENTA PROPRIO IL PIANO π_1
(IL FASCIO SI RIDUCE AD UN UNICO PIANO)

• SE ANALIZZIAMO IL CASO $\boxed{\square}$ $\Rightarrow$ I PIANI DEL FASCIO SONO TUTTI PARALLELI TRA LORO POICHÉ $\forall\,\alpha,\beta$ LA DIREZIONE È $a_1x+b_1y+c_1z=0$ (QUINDI LA STESSA) ED IL FASCIO È DETTO <u>IMPROPRIO</u>

N.B. I PIANI π_1 e π_2 SONO DETTI PIANI BASE DEL FASCIO

<u>ESERCIZIO</u>. DETERMINARE (SE ESISTE) IL PIANO DEL FASCIO DI ASSE LA RETTA s: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+y-z=1 \end{cases}$ E // ALLA RETTA r: $\begin{cases} -x+y-z=0 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$

(1) EQUAZIONE DEL FASCIO DI PIANI $\Rightarrow \alpha(2x-y-3)+\beta(x+y-z-1)=0$

VERIFICO CHE L'EQ. DATA È DAVVERO UNA RETTA

PRENDO LA MATRICE DEI COEFFICIENTI $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ VERIFICHIAMO CHE IL RANGO SIA 2 (UNA RIGA NON È MULTIPLA DELL'ALTRA) $\Rightarrow$ 2 RIGHE SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

TORNANDO ALL'EQ. DEL FASCIO DI PIANI => PONGO $\alpha \neq 0$

$$(2x-y-3)+k(x+y-z-1)=0$$

ABBIAMO QUINDI PRESO IL PIANO $\pi: x+y-z-1=0$ CON DIREZIONE $\pi_0: x+y-z=0$

· EQUAZIONE PARAMETRICA DI r : $\begin{cases} x=t \\ y=z+t \\ 2t+z+t+z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ y=-\frac{t}{2}+1 \\ z=-\frac{3}{2}t+1 \end{cases}$ => $\begin{cases} x=t \\ y=-\frac{t}{2}+1 \\ z=-\frac{3}{2}t+1 \end{cases}$

$\boxed{\text{EQ. PARAMETRICA}}$

IN FORMA VETTORIALE:

$$X=t\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$: VEDIAMO SE LA RETTA r È // A π

ANALIZZANDO IL FATTO CHE $r_0 \subset \pi_0$ E QUINDI CHE UNA SUA BASE SIA $\in \pi_0$

MOLTIPLICO PER 2 PER ELIMINARE LE FRAZIONI => BASE DI r_0 È $\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ => ~~...~~ VEDIAMO SE $\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix} \in \pi_0$ =>

SOSTITUENDOLO IN $x+y-z=0 \Rightarrow 2-1+3 \neq 0 \Rightarrow r \not\parallel \pi: x+y-z-1=0$ QUESTO PIANO NON VA BENE!

PROVIAMO PER ~~...~~ UN PIANO GENERICO DEL FASCIO DI ASSE s:

$$2x-y-3+k(x+y-z-1)=0 \Rightarrow (2+k)x+(k-1)y-kz-3-k=0$$

CERCHIAMO SE UNO DI QUESTI PIANI È PARALLELO ALLA MIA RETTA

LA DIREZIONE DEL FASCIO: $(2+k)x+(k-1)y-kz=0$

$$(2+k)2+(k-1)(-1)-k(-3)=0$$

$$\Rightarrow 4+2k-k+1+3k=0 \Rightarrow 4k+5=0 \quad \boxed{k=-\frac{5}{4}}$$ RETTA E PIANO SONO //

SOSTITUISCO k E OTTENGO: $3x-9y+5z-7=0$

QUESTO È DUNQUE IL PIANO // ALLA RETTA r

DEFINIZIONE: SI DICE STELLA DI PIANI DI BASE I PIANI $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$,

$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

e $\pi_3: a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$

L'INSIEME DELLE COMBINAZIONI LINEARI DEI TRE PIANI DATI: LA SUA EQUAZIONE SARÀ $\alpha\pi_1+\beta\pi_2+\gamma\pi_3=0$

STUDIARE PER CASA IL SISTEMA $\Sigma: \begin{cases}\pi_1=0\\ \pi_2=0\\ \pi_3=0\end{cases}$

SE IL RANGO È 3 (RANGO MASSIMO) È IL CASO IN CUI TUTTI I PIANI HANNO IN COMUNE UN PUNTO (STELLA PROPRIA DI PIANI)

STUDIARE LE SUE POSSIBILI SOLUZIONI DA UN PUNTO DI VISTA GEOMETRICO

DEFINIZIONE: CONSIDERO DUE GRUPPI: $(G_1, *)$ e $(G_2, \square) \Rightarrow$ UN'APPLICAZIONE $f: G_1 \to G_2$ È DETTA MORFISMO (O OMOMORFISMO) DI GRUPPI SE $f(g_1 * g_2) = f_1(g_1) \square f(g_2)$ $\forall g_1, g_2 \in G_1$

ESEMPIO. $f: (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ È MORFISMO? $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ $f(n+m) = f(n) + f(m)$

$n \longrightarrow 3n$

GRUPPO ADDITIVO DEGLI INTERI

$$f(n+m) = 3(n+m) = 3n + 3m$$

SI, È UN MORFISMO DI GRUPPI ADDITIVI

$f: (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ APPLICAZIONE

$n \longrightarrow \dfrac{n}{n+1}$

È MORFISMO? NO

$$f(n+m) = \frac{n+m}{n+m+1} \neq$$

$$f(n) \cdot f(m) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{m}{m+1} = \frac{n \cdot m}{(n+1)(m+1)}$$

f NON È MORFISMO DI GRUPPI

DEFINIZIONE: CONSIDERO DUE ANELLI $(A, *, \square)$, $(A', *', \square') \Rightarrow$ UN'APPLICAZIONE $f: A \to A'$ È DETTA MORFISMO (O OMOMORFISMO) DI ANELLI SE $f(g_1 * g_2) = f_1(g_1) *' f(g_2)$ $\forall g_1, g_2 \in A$ E $f(g_1 \square g_2) = f(g_1) \square' f(g_2)$

ANALOGAMENTE PER I CORPI E I CAMPI

DEFINIZIONE: 1) UN MORFISMO SURIETTIVO È DETTO EPIMORFISMO

2) UN MORFISMO BIETTIVO È DETTO ISOMORFISMO

es. $(\mathbb{Z}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +, \cdot)$

$n \longrightarrow \dfrac{n}{1}$

ISOMORFISMO TRA L'INSIEME $\mathbb{Z}$ ED UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{Q}$

↓

DA QUI POSSIAMO DIRE CHE $\mathbb{Z}$ STA DENTRO A $\mathbb{Q}$ IN REALTÀ PARLIAMO DI UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{Q}$ E $\mathbb{Z}$ È ISOMORFO A QUESTO SOTTOINSIEME

ESERCIZIO:

$f: (M_{2\times 2}(\mathbb{Z}), +, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +, \cdot)$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to a$ È MORFISMO DI ANELLI?