5/06/19

CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE IN $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0 \quad \text{posto } A = (a_{ij}),\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^T A X + B^T X + c = 0$$

$x^2 - y^2 = 0$ in $\mathbb{R}^2$

$(x-y)(x+y) = 0 \rightarrow$ curva degenere: si spezza in due rette

$x = y$
$x = -y$ $\Rightarrow$ le due rette

I PASSO:

$$\sum_{1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{1}^{n} b_k x_k + c = 0 \longrightarrow \circledast\ \sum a_{ij} x_i x_j + \sum b_k x_k x_0 + c x_0^2 = 0$$

parte di II grado che rappresenta una quadratica

parte di I grado $\rightarrow$ lineare

andando in uno spazio proiettivo: AGGIUNGIAMO UNA VARIABILE x_0

$\Rightarrow$ tutti i termini diventano di secondo grado

COSTRUIAMO LA MATRICE ASSOCIATA ALLA FORMA QUADRATICA $\circledast$ CON $n+1$ VARIABILI

$$\tilde{A} = \begin{array}{c|c} & x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_n \\ \begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} & \begin{pmatrix} c & b_1/2 & b_2/2 & \cdots & b_n/2 \\ b_1/2 & a_{11} & a_{12}/2 & \cdots & \\ b_2/2 & \frac{a_{12}}{2} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ b_n/2 & \vdots & & & a_{nn} \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \end{array}$$

$n+1$ perché ho aggiunto una variabile

$\Rightarrow$ se $\det \tilde{A} \neq 0 \Rightarrow$ la quadrica è non degenere

se $\det \tilde{A} = 0 \Rightarrow$ la quadrica è degenere

II PASSO:

TORNIAMO ALL'EQUAZIONE IN n VARIABILI E lavoriamo solo con la prima parte (quella quadratica) e ne troviamo la forma canonica CON UN METODO A SCELTA

$$\sum_{1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{1}^{n} b_k x_k + c = 0$$

A = matrice associata alla forma quadratica $\longrightarrow$ ottengo la forma canonica $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2}$ NELLE NUOVE VARIABILI $\Rightarrow$ OTTENIAMO

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k + d = 0 \underset{\boxed{\text{con tutta una serie di trasformazioni OTTENIAMO}}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i^2 = \alpha$$

oppure $\sum_{i=1}^{r} \mu_i z_i^2 + \gamma z_{r+1} = 0$

se non riesco a levare tutti i termini di primo grado

III PASSO

ESAMINIAMO IL RANGO DELLA MATRICE A ASSOCIATA ALLA FORMA QUADRATICA: $rg\,A = n \Rightarrow$ la quadrica Q è detta non singolare $\Rightarrow$ OTTENIAMO L'EQUAZIONE CON TUTTE LE VARIABILI AL QUADRATO:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = d}\ : \ \boxed{\text{Se } d>0}\ \ \pm\frac{y_1^2}{a_1^2} \pm \frac{y_2^2}{a_2^2} \pm \dots \pm \frac{y_n^2}{a_n^2} = +1$$

POSSIAMO SCRIVERE

CON $a_j = \sqrt{\frac{d}{\lambda_j}}$ $\forall j = 1, \dots, n$

$\left(a_j^2 = \left|\frac{d}{\lambda_j}\right| \right)$

$\Rightarrow$ la segnatura di A caratterizza la forma quadratica

$(0,n)$ è escluso perché al termine noto ho $+1$

tutti i casi possibili sono $(n,0), (n-1,1), (n-2,2), \dots, (1,n-1) \Rightarrow$ ci sono n quadriche possibili

sono tutte quadriche a centro

VEDIAMO I CASI POSSIBILI NEL PIANO E NELLO SPAZIO!

1) $n=2$

segn. $= (2,0) \to \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ ellisse dove a_1 e a_2 sono i semiassi

" $(1,1) \to \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ iperbole

2) $n=3$

SEGNATURA (3,0):

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \quad \text{ellissoide} \quad \text{se } a_1 = a_2 = a_3 \Rightarrow \text{SUPERFICIE sferica}$$

PER DISEGNARE LA SUPERFICIE, CERCO LE CURVE OTTENUTE INTERSECANDO CON PIANI: TAGLIANDO la superficie con tre piani $(x_1=0, x_2=0, x_3=0)$ COORDINATI viene un'ellisse; INTERSECO POI CON FASCI DI PIANI PARALLELI AI PIANI COORDINATI:

AD ESEMPIO $\boxed{x_3 = k} \Rightarrow \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1 - \frac{k^2}{a_3^2} \Rightarrow a_3^2 - k^2 > 0 \Rightarrow \boxed{-a_3 < k < a_3}$: INTERSECO IN UN'ELLISSE SOLO PER $-a_3 < k < a_3$; POI INTERSECO CON $x_1 = k$ E $x_2 = k \dots$ E COSÌ VIA

SEGNATURA (2,1) $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$ iperboloide a 1 falda

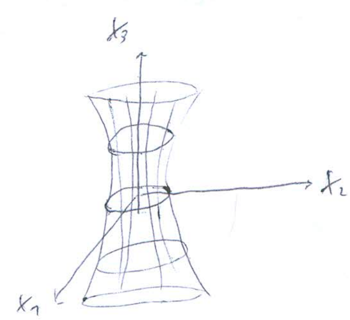
INTERSECO COI PIANI COORDINATI:

per $x_1 = 0$ ottengo un'iperbole

per $x_2 = 0$ " "

per $x_3 = 0$ ottengo un'ellisse

POI INTERSECO CON I FASCI: $x_1 = k$, $x_2 = k$, $x_3 = k$ E DISEGNO LE CURVE OTTENUTE $\Rightarrow$ QUESTA È LA FIGURA CHE NE RISULTA



SEGNATURA (1,2) $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$ IPERBOLOIDE A DUE FALDE

III b) $\boxed{d=0}$

$$\pm\frac{x_1^2}{a_1^2} \pm \frac{x_2^2}{a_2^2} \pm \dots \pm \frac{x_n^2}{a_n^2} = 0$$

rigata $\to$ ogni retta passante per un punto della quadrica e per l'origine appartiene alla quadrica

$(n,0)$ e $(0,n)$ origine

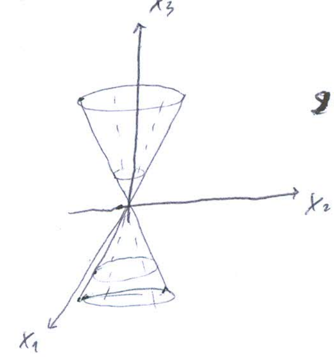
$\frac{n}{2}$ se n è pari

$\frac{n-1}{2}$ se n è dispari

SE I COEFFICIENTI POSITIVI SONO $> \frac{n}{2}$, MOLTIPLICANDO PER -1 OTTENIAMO UN # DI COEFFICIENTI POSITIVI $< \frac{n}{2}$ PERCHÉ L'EQUAZIONE È OMOGENEA

IN $\mathbb{R}^3$ ABBIAMO SOLO ...

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=0}$$



SUPERFICIE CONICA

per $x_3=0$ → origine

per $x_1=0$ → due rette

per $x_2=0$ → due rette

per $x_3=k$ → ellisse $\forall k \in \mathbb{Z}$ E COSÌ VIA ⇒

IV) PASSO

rg $A<n$ → Sono presenti tutte le variabili perché $\det \tilde{A} \neq 0$; LA QUADRICA NON È A CENTRO.

$$\pm\frac{z_1^2}{a_1^2}\pm\frac{z_2^2}{a_2^2}\pm\dots\pm\frac{z_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=z_n$$

SONO DEFINITE A MENO DI SPECCHIAMENTI CHE CAMBIA IL SEGNO DI z_n, PER CUI

Se n è pari $\exists \frac{n}{2}$ tipi diversi

in $\mathbb{R}^2$ $\frac{z_1^2}{a_1^2}=z_2$ iperbole

Se n è dispari $\exists \frac{n+1}{2}$ tipi diversi

in $\mathbb{R}^3$: $\frac{z_1^2}{a_1^2}+\frac{z_2^2}{a_2^2}=z_3$ paraboloide ellittico

$\frac{z_1^2}{a_1^2}-\frac{z_2^2}{a_2^2}=z_3$ paraboloide iperbolico

V PASSO: SE L'EQUAZIONE IN FORMA CANONICA CONTIENE MENO DI n COORDINATE LA QUADRICA È UN CILINDRO O SI SPEZZA IN IPERPIANI.

ES) $x^2-4xy-2y^2-3x-3y+5=0$ → RISCRITTO INTERAMENTE

$$A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&2\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix}$$

$$\ell \to \mathcal{B}_1=\left\{\begin{pmatrix}-2/\sqrt5\\1/\sqrt5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt5\\2/\sqrt5\end{pmatrix}\right\} \qquad 2\tilde{x}^2-3\tilde{y}^2$$

$$\begin{cases} x=-2/\sqrt5\,\tilde{x}+1/\sqrt5\,\tilde{y}\\ y=1/\sqrt5\,\tilde{x}+2/\sqrt5\,\tilde{y}\end{cases}$$

→ sostituendo nell'equazione troviamo le nuove coordinate

$$2\sqrt5\,\tilde{x}^2-3\sqrt5\,\tilde{y}^2-3\tilde{y}+3\tilde{x}+5\sqrt5=0$$

$$\begin{cases} x_1=\tilde{x}+\frac{3}{4\sqrt5}\\ y_1=\tilde{y}+\frac{3}{2\sqrt5}\end{cases}$$

equazione nelle nuove coordinate

$$-2\sqrt5\,x_1^2+3\sqrt5\,y_1^2=\frac{245}{8\sqrt5}$$

$$-\frac{x_1^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2}+\frac{y_1^2}{\left(\frac{7}{2\sqrt6}\right)^2}=1$$ → iperbole

STUDIO DELLE QUADRICHE

$$Q(X) = X^T A X + B^T X + c = 0$$

1) Costruiamo l'equazione omogenea (aggiungendo una variabile) e valutiamo la matrice $\tilde{A} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$:

$\det \tilde{A} \neq 0 \Rightarrow$ NON DEGENERE

$\det \tilde{A} = 0 \Rightarrow$ DEGENERE

2) Riduciamo l'equazione a $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j^2 + \sum_{k=1}^{n} \mu_k Y_k + d = 0$

Se $\lambda_j \neq 0$ possiamo eliminare il termine lineare con una traslazione: $Y_j + \dfrac{\mu_j}{2\lambda_j} = Z_j$

se scompaiono tutti i termini lineari $\Rightarrow$ Q è a centro

3) Se $\operatorname{rg} A = n \Rightarrow$ Q è non singolare

3a) $d \neq 0$

supponiamo $d > 0 \Rightarrow$ dividendo per d e ponendo i denominatori come quadrati, avremo

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{z_i^2}{a_i^2} - \frac{z_{i+1}^2}{a_{i+1}^2} - \dots - \frac{z_n^2}{a_n^2} = 1$$

ci sono tanti tipi diversi di quadriche a centro, non singolari, quante sono le segnature possibili delle forme quadratiche, tranne $(0,n)$ che non può sussistere in $\mathbb{R}$ avendo posto $d>0$; sono $(n,0)$, $(n-1,1)$, $(n-2,2)$, ..., $(1,n-1)$. Sono esattamente n.

3b) $d = 0$: Q è "superficie" conica

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{z_i^2}{a_i^2} - \frac{z_{i-1}^2}{a_{i-1}^2} - \dots - \frac{z_n^2}{a_n^2} = 0$$

l'equazione è omogenea $\Rightarrow$ se il punto $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sta su $Q \Rightarrow (t\alpha_1, t\alpha_2, \dots, t\alpha_n) \in Q$, quindi la quadrica è costituita da rette per l'origine: quante sono?

se i coefficienti positivi sono $> \frac{n}{2}$, moltiplicando per -1 otteniamo un # di coefficienti positivi $< \frac{n}{2} \Rightarrow$

Se n è pari, sono $\frac{n}{2}$ tipi diversi

Se n è dispari, sono $\frac{n-1}{2}$

(+ il caso della sola origine)

4) Se non scompaiono tutti i termini lineari $\Rightarrow Q$ non è a centro:

$\det A = 0 \Rightarrow Q$ singolare

(sono presenti tutte le variabili perché $\det A_1 \neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{z_i^2}{a_i^2} - \frac{z_{i+1}^2}{a_{i+1}^2} - \dots - \frac{z_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = z_n$$

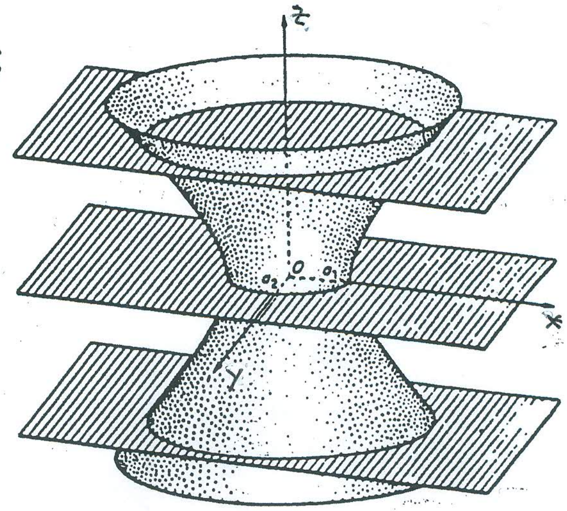
A meno di specchiamenti che cambino il segno di z_n:

se n è pari sono $\frac{n}{2}$

se n è dispari sono $\frac{n+1}{2}$

5) Se contiene meno di n coordinate abbiamo i cilindri o si spezza in iperpiani.

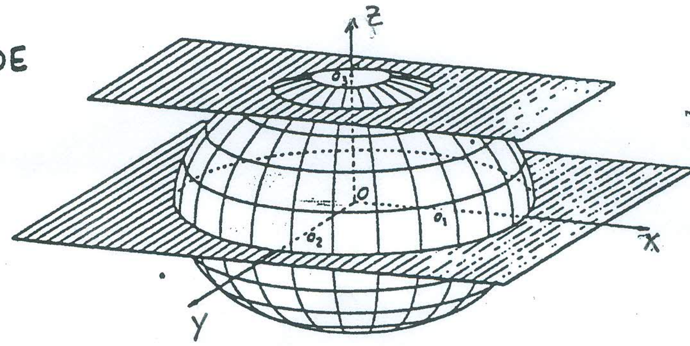
IPERBOLOIDE A UNA FALDA



$$x^2+y^2-z^2=1$$

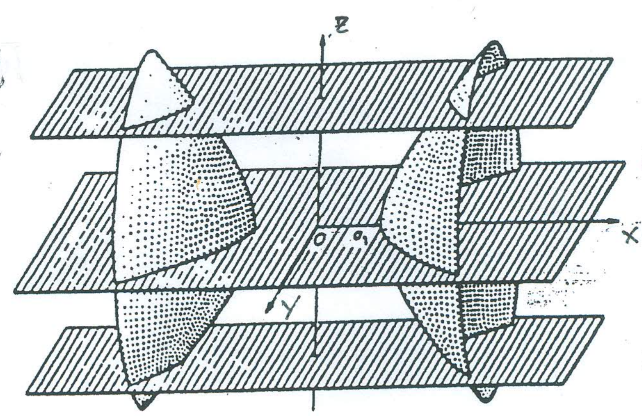
FIGURE 3

ELLISSOIDE



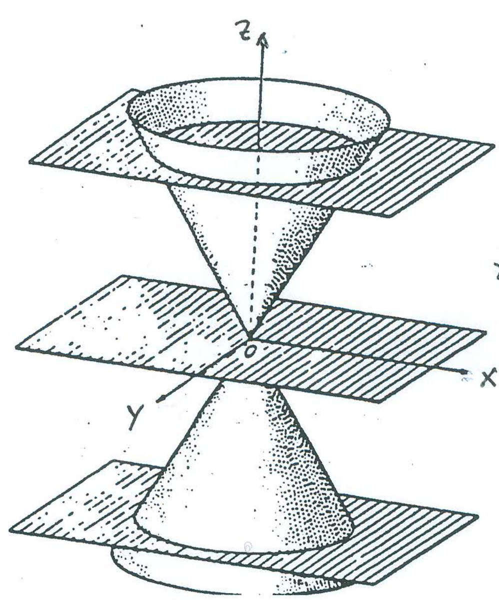
$$x^2+y^2+z^2=1$$

IPERBOLOIDE A DUE FALDE



$$x^2-y^2-z^2=1$$

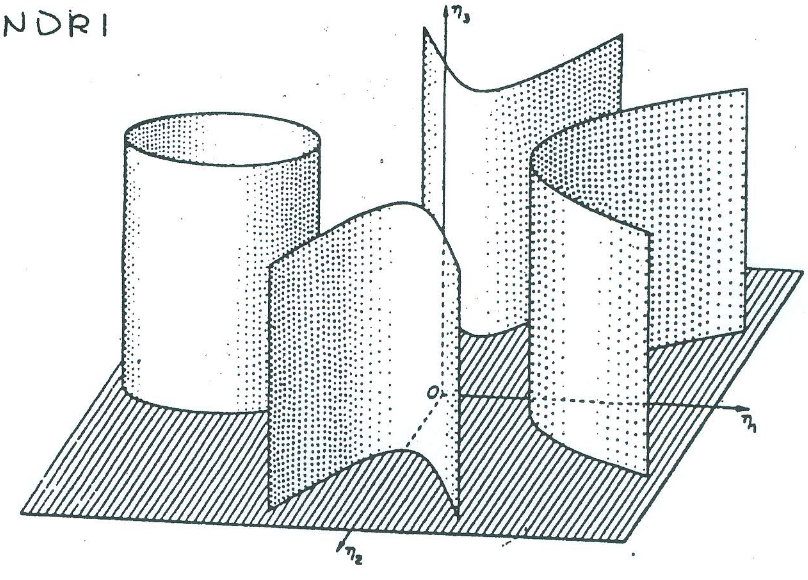
CONO



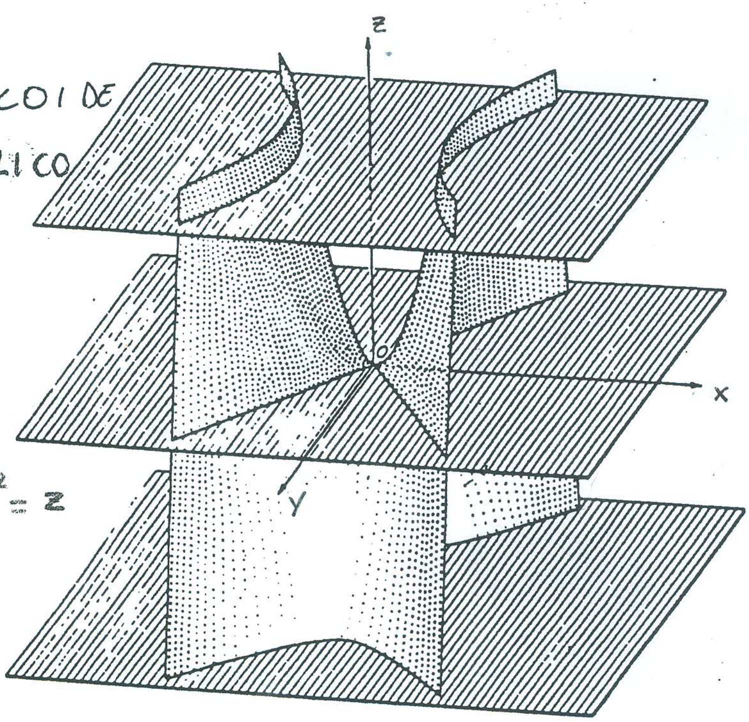
$$x^2+y^2-z^2=0$$

QUADRICHE CENTRALI NON DEGENERI NON SINGOLARI

CILINDRI

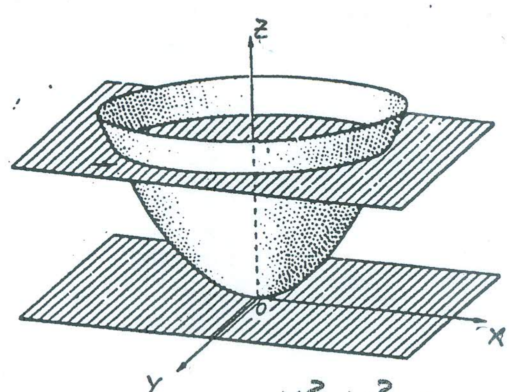


PARABOLOIDE
PERBOLICO



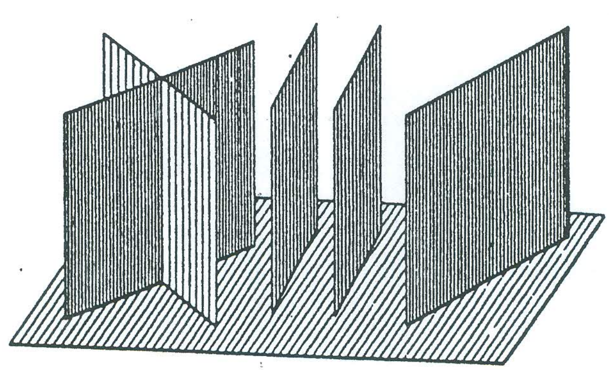
$x^2 - y^2 = z$

QUADRICHE NON DEGENERI
SINGOLARI



$x^2 + y^2 = z$

PARABOLOIDE
ELLITTICO



COPPIE DI PIANI

ESERCIZIO

Tracciare il grafico della conica avente equazione nelle coordinate x, y definite dalla base canonica:

$$Q: \quad x^2 - 4xy - 2y^2 - 3x - 3y + 5 = 0$$

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ della parte quadratica: diagonalizziamola:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(1-\lambda)(2+\lambda) - 4 = 0$$

$$-2 - \lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. è tale che $D = S^{-1} A S$

Cerco S ortogonale, perché D deve essere anche congruente ad A:

Cerco gli autovettori: $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|v_1\| = \sqrt{5} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

E_{-3}: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2x + y = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\|v_2\| = \sqrt{5}$

$\Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$: prendo $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ le coordinate nella base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ si ha:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2/\sqrt{5}\, \tilde{x} + 1/\sqrt{5}\, \tilde{y} \\ y = 1/\sqrt{5}\, \tilde{x} + 2/\sqrt{5}\, \tilde{y} \end{cases} \Rightarrow \text{l'equazione nelle coordinate}$$

(2)

$\tilde{x}, \tilde{y}$ diventa: $2\tilde{x}^2 - 3\tilde{y}^2 - 3\left(-\frac{2}{\sqrt5}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt5}\tilde{y}\right) - 3\left(\frac{1}{\sqrt5}\tilde{x} + \frac{2}{\sqrt5}\tilde{y}\right) + 5 = 0$

$\Rightarrow 2\sqrt5\,\tilde{x}^2 - 3\sqrt5\,\tilde{y}^2 - 9\tilde{y} + 3\tilde{x} + 5\sqrt5 = 0$

Ora riduciamo ai quadrati:

$$2\sqrt5\left[\left(\tilde{x} + \frac{3}{4\sqrt5}\right)^2 - \frac{9}{16\cdot5}\right] - 3\sqrt5\left[\left(\tilde{y} + \frac{9}{6\sqrt5}\right)^2 - \frac{81}{36\cdot5}\right] + 5\sqrt5 = 0$$

$$2\sqrt5\left(\tilde{x} + \frac{3}{4\sqrt5}\right)^2 - \frac{9}{8\sqrt5} - 3\sqrt5\left[\left(\tilde{y} + \frac{9}{6\sqrt5}\right)^2 + \frac{27}{4\cdot\sqrt5}\right] + 5\sqrt5 = 0$$

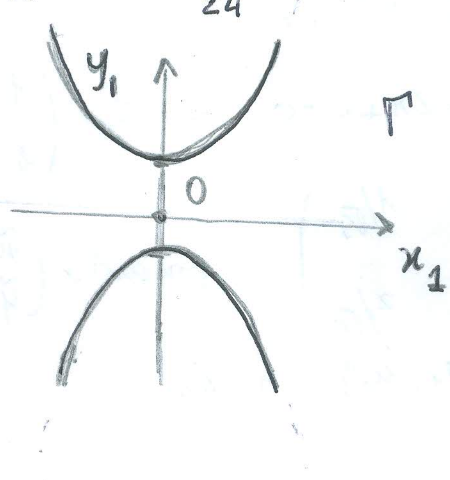
$$2\sqrt5\left(\tilde{x} + \frac{3}{4\sqrt5}\right)^2 - 3\sqrt5\left(\tilde{y} + \frac{3}{2\sqrt5}\right)^2 + \frac{245}{8\sqrt5} = 0$$

Operiamo il cambiamento di coordinate:

$$(*)\ \begin{cases} x_1 = \tilde{x} + \dfrac{3}{4\sqrt5} \\ y_1 = \tilde{y} + \dfrac{3}{2\sqrt5} \end{cases} \Rightarrow -2\sqrt5\, x_1^2 + 3\sqrt5\, y_1^2 = +\frac{245}{8\sqrt5}$$

$$\Rightarrow -\frac{x_1^2}{\frac{245}{8\sqrt5}\cdot\frac{1}{2\sqrt5}} + \frac{y_1^2}{\frac{245}{8\sqrt5}\cdot\frac{1}{3\sqrt5}} = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{x_1^2}{\frac{49}{16}} + \frac{y_1^2}{\frac{49}{24}} = 1 \Rightarrow -\frac{x_1^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2} + \frac{y_1^2}{\left(\frac{7}{2\sqrt6}\right)^2} = 1 \quad \underline{\text{IPERBOLE}}$$



Questa è la conica Γ nel sistema di riferimento x_1, y_1

Il cambiamento di coordinate (*) definisce una traslazione

l'origine delle coordinate $\tilde{x}, \tilde{y}$ ha coordinate rispetto alla base nelle coordinate x_1, y_1: $\left(\frac{3}{4\sqrt5}, \frac{3}{2\sqrt5}\right)$