ESEMPIO

05/12/2018

$f: (\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}); +) \rightarrow (\mathbb{Z}; +)$

dobbiamo dimostrare che tra i due gruppi ci sia un omomorfismo. Quindi devo dimostrare che L'IMMAGINE DELLA somma di due elementi sia uguale ALLA SOMMA delle loro immagini

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow a$$

$$\underset{g_1}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} + \underset{g_2}{\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \Rightarrow a + a' = f(g_1 + g_2)$$

$$f(g_1) + f(g_2) = a + a' \Rightarrow f(g_1+g_2) = f(g_1) + f(g_2)$$

Altro esercizio:

$$\det: (\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q}) - \{0\}, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow ad - bc = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Date A e $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q}) \rightarrow$ voglio dimostrare che

$$\det(A) \cdot \det(B) = \det(A \cdot B)$$

Questo lo abbiamo già dimostrato con il teorema di Binet PERCIÒ "det" È UN MORFISMO DI GRUPPI MOLTIPLICATIVI

Definizione: Dato un morfismo del tipo:

$f: (G, *) \longrightarrow (G', \square)$ con G e G' gruppi $\Rightarrow$ si dice NUCLEO (o KERNEL) di f il sottoinsieme di G così definito:

$(N_c f) = \operatorname{Ker} f = \{ g \in G \mid f(g) = n_{G'} \}$ dove $n_{G'}$ è l'elemento neutro di G'

Proposizione: dato $f:(G,*) \rightarrow (G',\square)$ morfismo di gruppi $\Rightarrow$

1) $f(n_G) = n_{G'}$ con n_G e $n_{G'}$ elementi neutri dei gruppi G e G'

2) $\forall g \in G \quad f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$

3) Se H è un sottogruppo di $G \Rightarrow f(H)$ è un sottogruppo di G'. IN PARTICOLARE $f(G) = \mathrm{Im} f$ E' UN SOTTOGRUPPO DI G'

4) $\ker f$ è sottogruppo di G

Definizione: dati due spazi vettoriali V e W su un campo K, i morfismi $L: V \rightarrow W$ sono detti APPLICAZIONI LINEARI

Pertanto

$L: V \rightarrow W$ E' LINEARE $\Leftrightarrow$ 1) $L(v_1+v_2) = L(v_1)+L(v_2) \ \forall v_1, v_2 \in V$
2) $L(\alpha v) = \alpha L(v) \ \forall \alpha \in K$ e $\forall v \in V$

Osservazione: le 1) e 2), precedentemente scritte, possono essere RIASSUNTE in un'unica proprietà:

$$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K \text{ e } \forall v_1, v_2 \in V$$

Esempio 1: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x$ è lineare?

1) $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ $\quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$3(x_1+x_2) = 3x_1 + 3x_2$

2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

$3(\alpha x) = \alpha(3x)$

Entrambe le proprietà sono dimostrate, quindi è lineare (quindi è un morfismo di spazi vettoriali)

OPPURE si può dimostrare:

$L(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) = \alpha_1 L(V_1) + \alpha_2 L(V_2) \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$ e $\forall V_1, V_2 \in V$

$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = 3(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = 3\alpha_1 x_1 + 3\alpha_2 x_2 =$

$= \alpha_1 3x_1 + \alpha_2 3x_2 = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$

c.v.d.

ESEMPIO 2: CONSIDERIAMO $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ TALE CHE $f(x) = x^2 \Rightarrow$

VEDIAMO SE f È LINEARE:

esempio 2: $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \overset{?}{=} \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 \neq \alpha_1 (x_1)^2 + \alpha_2 (x_2)^2$$

Proprietà non dimostrata, quindi non è un morfismo

esempio 3:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \end{pmatrix}$$

è lineare? Per dimostrarlo dobbiamo prendere 2 vettori in $\mathbb{R}^3$ ~~...~~ v_1, v_2

Dati $\underset{v_1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}$ e $\underset{v_2}{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}$ $\Rightarrow$ cerco $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$= f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 \end{pmatrix} = A$$

$$\alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = \alpha \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 + y_2 + z_2 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + y_1 + z_1) + \beta(x_2 + y_2 + z_2) \\ \alpha(x_1 - y_1) + \beta(x_2 - y_2) \end{pmatrix} = B$$

A e B sono gli stessi perché hanno le coordinate omonime uguali PERCHÉ LE OPERAZIONI IN $\mathbb{R}$ GODONO DELLE PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA E COMMUTATIVA.

Osservazione: $L : V \to W$ è lineare se le coordinate del vettore immagine sono date da polinomi lineari omogenei nelle coordinate del vettore del dominio (come si può verificare negli esempi 1 e 3)

Esempio: Sia V uno spazio vettoriale reale n-dimensionale e una base $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow$ sappiamo che se $v \in V$ $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, $x_j \in \mathbb{R}$ $\forall j = 1, \dots, n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ l'applicazione $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è lineare; infatti:

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ e } \forall v, w \in V \Rightarrow$$

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE

$\varphi(\alpha_1 v + \alpha_2 w) = \alpha_1 \varphi(v) + \alpha_2 \varphi(w)$: pongo $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ e

$w = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha_1 v + \alpha_2 w = \alpha_1 \sum_{j=1}^{n} x_j v_j + \alpha_2 \sum_{j=1}^{n} y_j v_j =$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j) v_j \Rightarrow \varphi(\alpha_1 v + \alpha_2 w) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \varphi(v) + \alpha_2 \varphi(w) = \alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n \end{pmatrix}$$

abbiamo quindi dimostrato che φ è un'applicazione lineare.

ora voglio dimostrare che φ è biettiva:

È suriettiva perché, presa una n-upla in $\mathbb{R}^n$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ almeno un vettore $v \in V$ tale che $\varphi(v) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, basta prendere $v = \sum_{j=1}^{n} z_j v_j$.

È iniettiva perché ogni vettore di V è dato in modo unico come combinazione lineare dei vettori di base ($\mathcal{B}_V$).

Quindi è un <u>isomorfismo.</u> Dipende dalle basi scelte negli spazi vettoriali E QUINDI NON È UNICO! (O, COME SI DICE, <u>NON È CANONICO</u>)

Se io creo un isomorfismo tra due spazi vettoriali, ESSI devono avere le stesse CARATTERISTICHE ALGEBRICHE : AD ESEMPIO HANNO LA STESSA DIMENSIONE; DUE SPAZI VETTORIALI "ISOMORFI" POSSONO ESSERE CONSIDERATI COME LO STESSO SPAZIO VETTORIALE INDIPENDENTEMENTE DAGLI INSIEMI DIVERSI SOGGIACENTI; AD ESEMPIO, UNA MATRICE 3x2 PUÒ ESSERE IDENTIFICATA CON IL SUO VETTORE DELLE COORDINATE IN UNA BASE FISSATA, VETTORE CON 6 ENTRATE.

Un' applicazione $L: V \to W$ è data quando conosco l'immagine di un vettore generico di V.:

Sia L lineare e $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di $V \Rightarrow v$ sia un vettore generico di $V \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$. PER DEFINIRE L, cerco $L(v) = L\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(v_j)$: È sufficiente conoscere le immagini dei vettori di base per conoscere $L(v)$, qualunque sia $v \Rightarrow L$ è data se conosciamo le immagini dei vettori di base!

<u>Proposizione:</u> Siano V, W spazi vettoriali, $\dim V = n$, $\dim W = k$; $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e $w_1, w_2, \dots, w_n$ n vettori qualunque di $W \Rightarrow$ esiste sempre un'applicazione lineare $L: V \to W$ tale che $L(v_j) = w_j \quad \forall j = 1, \dots, n$.

<u>Dimostrazione:</u> devo dare $L(v)$ con v generico in $V \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \Rightarrow$
$\Rightarrow L(v) = L\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j \Rightarrow L$ è ben definita.

c.v.d.

Se i vettori del dominio di cui dò le immagini sono linearmente dipendenti non sempre esiste un'applicazione lineare che mandi i vettori del dominio nei vettori

Esempio:

$L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineare tale che $L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

perché L sia lineare occorre che $L\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = L\left(2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 2L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =$

$= 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ PERTANTO L'APPLICAZIONE L NON PUÒ ESSERE LINEARE.