LEZIONE 6 MARZO 2019

DIAGONALIZZARE UNA MATRICE

DEFINIZIONE: UNA MATRICE QUADRATA $n \times n$ È DETTA DIAGONALIZZABILE SE È SIMILE AD UNA MATRICE DIAGONALE, CIOÈ SE ESISTE UNA MATRICE D DIAGONALE ED S MATRICE INVERTIBILE TALE CHE

$$D = S^{-1} A S$$

RIGUARDA LA CONDIZIONE DI SIMILITUDINE TRA MATRICI

DEFINIZIONE: UN OPERATORE $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ È DIAGONALIZZABILE SE LO È UNA QUALUNQUE DELLE MATRICI AD ESSO ASSOCIATE

PROPOSIZIONE: UNA MATRICE $A_{n \times n}$ È DIAGONALIZZABILE (SE E SOLO SE) ESISTE UNA BASE NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^n$ COMPOSTA DA AUTOVETTORI RELATIVI ALL'OPERATORE $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ASSOCIATO AD A.

DIMOSTRAZIONE: "$\xrightarrow{SE}$" A È DIAGONALIZZABILE ALLORA ESISTE UNA MATRICE D DIAGONALE ~~MATRICE~~ ED UNA S INVERTIBILE TALE CHE $D = S^{-1} A S$. SE $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ È L'OPERATORE PER CUI QUESTA MATRICE A È TALE CHE $[T]_B = A$ (IN UNA BASE DATA B) ALLORA LA MATRICE S DÀ LA NUOVA BASE $\tilde{B}$ DI $\mathbb{R}^n$ TALE CHE $[T]_{\tilde{B}} = D$, ALLORA, POSTO

$$\tilde{B} = \{w_1; \dots; w_n\},$$

SI HA CHE

$$T(w_\gamma) = 0 w_1 + 0 w_2 + \dots \lambda_\gamma w_\gamma + \dots + 0 w_n$$

ALLORA

$$\Rightarrow T(w_\gamma) = \lambda_\gamma w_\gamma$$

ALLORA

ALLORA w_γ È AUTOVETTORE DI T RELATIVO ALL'AUTOVALORE λ_γ.
QUINDI $\tilde{B}$ È FORMATA DA AUTOVETTORI

"$\Leftarrow$" VICEVERSA, RIPETENDO IL RAGIONAMENTO A PARTIRE DALL'AVERE UNA BASE DI AUTOVETTORI FINO ALLA COSTRUZIONE DI D.

CVD

<u>PROPOSIZIONE:</u> SIA $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ UN OPERATORE,

T È DIAGONALIZZABILE (SE $\Longleftrightarrow$ E SOLO SE)

ESISTONO $\lambda_1 \dots \lambda_k$ AUTOVALORI DI T, CON $k \leq n$,

PER VIA DELLE MOLTEPLICITÀ

TALI CHE

$$\sum_{\gamma=1}^{k} \dim E_{\lambda_\gamma} = n$$

SOMMA DIRETTA

O, EQUIVALENTEMENTE,

$$\bigoplus_{\gamma=1}^{k} E_{\lambda_\gamma} = \mathbb{R}^n$$

GLI w DIVISE PER L'AUTOSPAZIO, A "GRUPPETTI"

<u>DIMOSTRAZIONE</u> "$\Rightarrow$" SE T È DIAGONALIZZABILE ALLORA ESISTE UNA BASE DI AUTOVETTORI $\tilde{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$,

IN CUI SIANO $w_1 \dots w_r$ AUTOVETTORI DI E_{λ_1},

$w_{r+1} \dots w_s$ AUTOVETTORI DI E_{λ_2} ...

(E COSÌ VIA, IN MANIERA ORDINATA)

PONGO $V_1 = \langle\langle w_1 \dots w_r \rangle\rangle$ $\rightsquigarrow$ OGNUNO GENERATO DA UNA PARTE DELLA BASE

$V_2 = \langle\langle w_{r+1} \dots w_s \rangle\rangle$ (E COSÌ VIA) ...

SOMMANDOLI

ALLORA

$$V_1 + V_2 + \dots V_\ell = \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^n = \sum_{\gamma=1}^{\ell} V_\gamma = \sum_{\gamma=1}^{\ell} E_{\lambda_\gamma}$$

← CIÒ CHE VOLEVO DIMOSTRARE, CAMBIA SOLO L'INDICATORE ℓ / k

IN QUANTO AGLI $V_\gamma \subseteq E_{\lambda_\gamma}$

ALTERNATIVAMENTE

ALLORA $$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\gamma=1}^{\ell} E_{\lambda_\ell}$$

"$\Leftarrow$" VICEVERSA, DATA $\mathcal{B}_{E_{\lambda_\gamma}} = \{ v_1; \dots; v_{k_\gamma} \}$ CON $\gamma = 1 \dots \ell$

ALLORA ~~ESISTE~~ POSSO CONSIDERARE

ALLORA $\mathcal{B} = \bigcup_{\gamma=1}^{\ell} \mathcal{B}_{E_{\lambda_\gamma}}$: È BASE DI $\mathbb{R}^n$ FORMATA DA AUTOVETTORI, QUINDI $\to$ T È DIAGONALIZZABILE

(POICHÉ AUTOVETTORI RELATIVI AD AUTOVALORI DIVERSI SONO LIN. INDIP.) CVD

ABBIAMO PRECEDENTEMENTE DIMOSTRATO CHE

$$T \text{ DIAGONALIZZABILE} \iff \sum_{\gamma=1}^{\ell} \dim E_{\lambda_\gamma} = n,$$

SAPPIAMO CHE $\dim E_{\lambda_\gamma} \leq \mu(\lambda_\gamma)\ \forall \gamma = 1 \dots \ell$,

QUINDI SVILUPPIAMO UN'ALTRA

PROPOSIZIONE: SIA $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ UN OPERATORE, È DIAGONALIZZABILE (IN $\mathbb{R}$) $\iff$ (SE E SOLO SE), POSTO $A = [T]_{\mathcal{B}}$, ~~SE LA~~ $P_A(\lambda)$ HA SOLO RADICI NEL CAMPO $\mathbb{R}$ E

$$\dim E_{\lambda_\gamma} = \mu(\lambda_\gamma)\ \forall \gamma = 1 \dots \ell$$

DIMOSTRAZIONE: (PAG. 4)

DIMOSTRAZIONE "$\Rightarrow$" SE T È DIAGONALIZZABILE ALLORA

$$n = \sum_{\gamma=1}^{\ell} \dim E_{\lambda_\gamma} \quad \ldots \text{INOLTRE } \sum \mu(\lambda_\gamma) \text{ NON}$$

PUÒ SUPERARE IL GRADO DI $P_A(\lambda) \Rightarrow$ POICHÉ $\dim E_{\lambda_\gamma} \leq \mu(\lambda_\gamma)$

$$\forall \gamma = 1, \ldots \ell \Rightarrow \sum \dim E_{\lambda_\gamma} \leq \sum_{\gamma=1}^{\ell} \mu(\lambda_\gamma) \leq n \text{ : SI HA QUINDI: } \sum_{\gamma=1}^{\ell} \dim E_{\lambda_\gamma} = n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\gamma=1}^{\ell} \mu(\lambda_\gamma) = n \quad \text{E QUESTO È POSSIBILE} \Leftrightarrow$$

$$\dim E_{\lambda_\gamma} = \mu(\lambda_\gamma) \quad \forall \gamma = 1 \ldots \ell$$

"$\Leftarrow$" VICEVERSA, SI RIPETE IL RAGIONAMENTO IN MANIERA ANALOGA.

CVD

DA CIÒ CHE SI È SCRITTO, SI STILA UN COROLLARIO:

COROLLARIO: SE, DATO $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ OPERATORE, ESISTONO n AUTOVALORI REALI DISTINTI PER T, QUINDI T È DIAGONALIZZABILE.

ESERCIZIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

TROVARE UNA MATRICE DIAGONALE SIMILE.

ESISTE ~~UNA MATRICE~~ UN OPERATORE $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ TALE CHE $[T]_{\mathcal{E}} = A$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+2y \\ 2y \\ -2x-2y-z \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

PER TROVARE LE COORDINATE CORRISPONDENTI IN A

CONTINUA...

T È DIAGONALIZZABILE?

DETERMINANTE

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 \end{array}\right\}$$ RADICI CARATTERISTICHE CIOÈ AUTOVALORI DI T

MOLTEPLICITÀ?

AUTOVALORI	MOLTEPLICITÀ
$\lambda_1 = 2$	$M(2) = 1$
$\lambda_2 = 1$	$M(1) = 1$
$\lambda_3 = -1$	$M(-1) = 1$

LA MATRICE DIAGONALE SIMILE D (TALE CHE $D = S^{-1}AS$) È

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

NELLA BASE RISPETTARE L'ORDINE SCELTO DEGLI AUTOVALORI NELLA MATRICE DIAGONALE

CON $\lambda = 2 = \lambda_1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ \cancel{0 = 0} \\ -2x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

RISOLVERE IL SISTEMA

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = -x = -2y \end{cases} \rightarrow E_2 = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$$

PRIMO VETTORE DELLA BASE CERCATA

CONTINUA...

CON $\lambda = 1 = \lambda_2$

$$A \to \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad E_1 = \begin{cases} y = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

LINEARMENTE DIPENDENTI

$$E_1 = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$$

2° VETT.

CON $\lambda = -1 = \lambda_3$

$$A \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$E_{-1} = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$$

$$\longrightarrow \quad \mathcal{B} = \left\{ \underset{E_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}; \underset{E_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}; \underset{E_{-1}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

È BASE DI $\mathbb{R}^3$ FORMATA DA AUTO VETTORI

DALLA BASE TROVIAMO LA MATRICE S

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

È SICURAMENTE INVERTIBILE PERCHÉ I VETTORI COLONNA SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI PER COSTRUZIONE

~~RIDUZIONE A SCALINI CON METODO DI GAUSS~~ $\to$ $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

DA QUI SI TROVA LA MATRICE D CERCATA

DATA $A \in M_{n \times n}$ CERCO A^{1250} (METODO VELOCE CON DIAGONALIZZAZIONE)

SIA $A = D$ DIAGONALE $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{1250} = \begin{pmatrix} a_{11}^{1250} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & \dots & a_{nn}^{1250} \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO:}}$ DIMOSTRARE CHE $D^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & a^k \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\forall n$ e $\forall k$ DA FARE

SIA A DIAGONALIZZABILE, ALLORA ESISTONO $D, S \in M_{n \times n}$ TALI CHE

$$D = S^{-1} A S$$

$\Rightarrow$ $SD = SS^{-1}AS$ e $\Rightarrow$

CONTINUA

$$\rightarrow \quad SDS^{-1} = (SS^{-1})A(SS^{-1}) = IAI = A$$ ALLORA:

PROPOSIZIONE:

$$\boxed{A^n} = (SDS^{-1})^n = \underbrace{SD(\overset{I}{S^{-1}\ldots S})D(\overset{I}{S^{-1}\ldots S})\ldots}_{n \text{ VOLTE}} =$$

$$= S\underbrace{DDDD\ldots D}_{125} S^{-1} = \boxed{S D^n S^{-1}}$$

MOLTO PIÙ SEMPLICE CHE CERCARE DIRETTAMENTE A^n

$\boxed{\text{cvd}}$

ESEMPIO

QUALSIASI N

$$A^{125} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{125} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8^{125} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{125} & 0 \\ 0 & 0 & -1^{125} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \ldots & \end{pmatrix}$$

MATRICE A DI PRIMA

S DI PRIMA

D

S^{-1}

IL PRODOTTO È SEMPLICE CON UNA MATRICE DIAGONALE