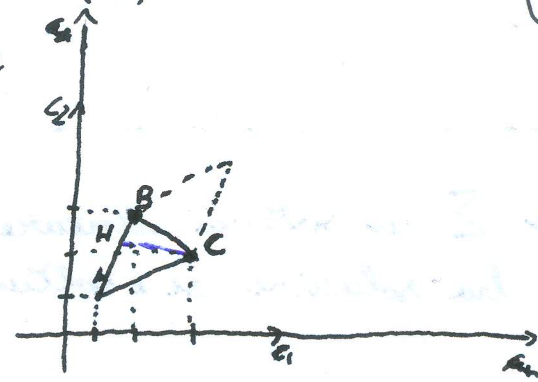
ESERCIZIO:

CALCOLARE AREA DEL TRIANGOLO DI VERTICI $\overset{A}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, \overset{B}{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}, \overset{C}{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}$



· Trovo i vettori $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ trasferendoli nell'origine

$\overline{AB} = V_1 = B - A = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\overline{AC} = V_2 = (C - A) = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

· Calcoliamo l'area del parallelogramma che ha per lati V_1 e V_2

$$\text{Area } P(V_1;V_2) = \sqrt{\begin{vmatrix} V_1\cdot V_1 & V_1\cdot V_2 \\ V_2\cdot V_1 & V_2\cdot V_2 \end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \text{Area triangolo} = \frac{3}{2}$$

(è la metà dell'area del parallelogramma)

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL DETERMINANTE:

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^n$, euclideo, considero una base $B_{\mathbb{R}^n} = \{e_1 \dots e_n\}$

Siano $C_A^1, C_A^2, \dots, C_A^n$ i vettori colonna di A. (vale anche per i vettori riga)

$$\Rightarrow C_A^j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Sia G la matrice di Gram sui vettori colonna C_A^j

$$\Rightarrow G = \begin{pmatrix} C_A^1\cdot C_A^1 & C_A^1\cdot C_A^2 & \cdots & C_A^1\cdot C_A^n \\ \vdots & & & \\ C_A^n\cdot C_A^1 & C_A^n\cdot C_A^2 & \cdots & C_A^n\cdot C_A^n \end{pmatrix} \Rightarrow C_A^j\cdot C_A^i = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k\right)$$

$= a_{1j}e_1\cdot a_{1j}e_1 + a_{1j}e_1\cdot a_{2j}e_2 + \dots$

$\dots + a_{1j}e_1\cdot a_{nj}e_n + \dots$

$\dots + a_{nj}e_n\cdot a_{jj}e_n + \dots$

$\dots + a_{nj}e_n\cdot a_{ni}e_n$

$a_{1j}; a_{2j}; a_{3j}; a_{nj}$ = elementi della j-esima colonna della nostra matrice CHE SONO ANCHE LE ENTRATE DELLA J-SIMA RIGA DI A^T;

E $a_{1i}, a_{2i} \dots a_{ni}$ SONO ELEMENTI DELLA I-ESIMA COLONNA DI A

$$\boxed{= a_{1j}\cdot a_{1i} + a_{2j}a_{2i} + a_{3j}a_{3i} + \dots + a_{nj}a_{ni}}$$

$\Rightarrow \quad = R_j(A^T)\cdot C^i(A) \rightarrow$ Pertanto: $A^T\cdot A$ = MATRICE DI GRAM DI $C^j_{j=1\dots n}$

e quindi $\Rightarrow G(C_A^1, \dots C_A^n) = |A^T\cdot A|$

$= |A|^2$

$$|A| = \sqrt{G(C_{A}^{1},\dots,C_{A}^{h})}$$

↳ questo è il volume DEL PARALLELEPIPEDO. $P(C_{A}^{1},\dots,C_{A}^{h})$

Sia Σ un sistema lineare non omogeneo con k righe e h colonne $\Rightarrow$ ha soluzione se e soltanto se $rg\,A = rg(A\vdots B)$ ovvero se $\Sigma: \underset{k\times h}{A}\,\underset{h\times 1}{X} = \underset{k\times 1}{B}$

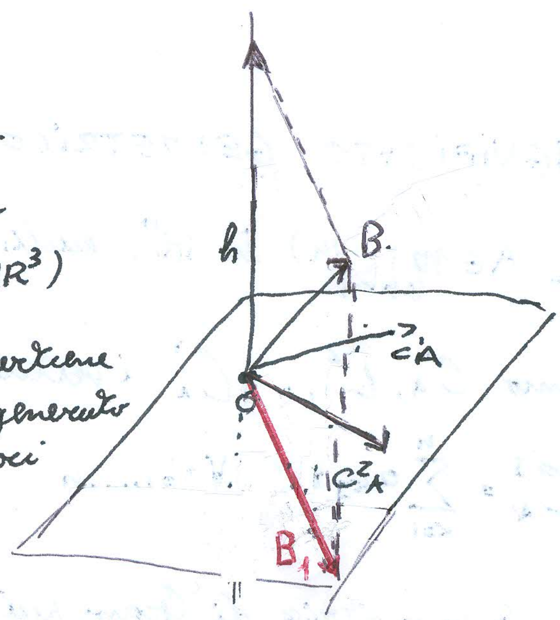
$\Rightarrow$ Il sistema si può riscrivere così: $x_1 C_{A}^{1} + x_2 C_{A}^{2} + \dots + x_h C_{A}^{h} = B$

$\Rightarrow \Sigma$ ha soluzione se e soltanto se $B \in \langle\langle C_{A}^{1},\dots,C_{A}^{h}\rangle\rangle$, in uno spazio ambiente k-dimensionale

<u>Se il $rg\,\Sigma = k$ allora Σ ha soluzione.</u>

- Supponiamo $rg\,\Sigma < k$: $\Rightarrow h < k$; $h = rg\,\Sigma$

ESEMPIO:
$x_1 C_{A}^{1} + x_2 C_{A}^{2} = B$ in uno spazio 3-D ($\mathbb{R}^3$)



(B non appartiene allo spazio generato dai due vettori $\Rightarrow$ cioè B non è soluzione)

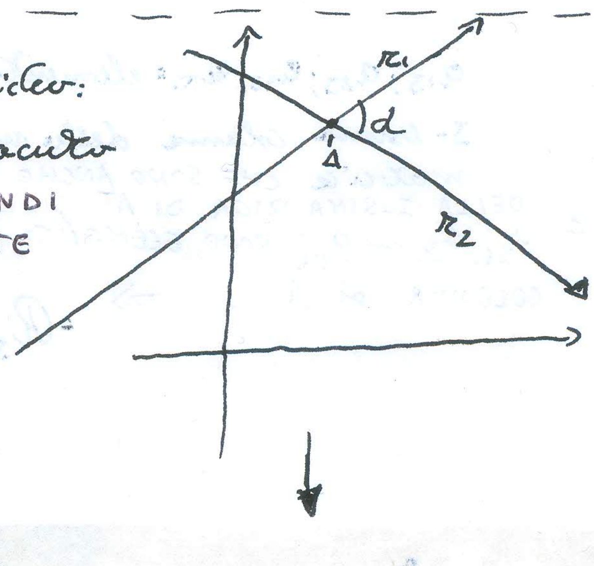
"Cerchiamo una soluzione approssimata = proiezione ortogonale di B sul ~~piano~~ sottospazio generato $\langle\langle C_{A}^{1},\dots,C_{A}^{h}\rangle\rangle$

$\Sigma_1: x_1 C_{A}^{1} + x_2 C_{A}^{2} = B_1 \Rightarrow \Sigma_1$ ha soluzione

$\Rightarrow B = B_1 + h \rightarrow$ la norma di h ($\|h\|$) dà l'errore commesso nel sostituire B_1 e B NELLA COLONNA DEI TERMINI NOTI

VOGLIAMO MISURARE l'angolo tra rette incidenti in $\mathbb{R}^2$ euclideo:

*- oriento le rette e consideriamo l'angolo acuto
- trasliamo il punto A sull'origine E QUINDI CONSIDERIAMO LE DIREZIONI DELLE RETTE
- considero due vettori di base V_1; V_2

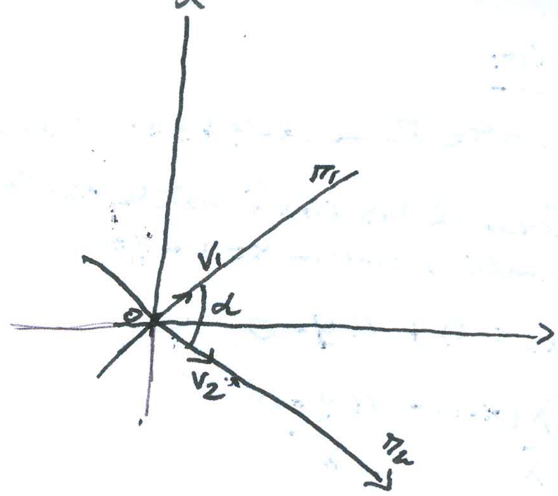


* (angolo α sempre compreso tra zero e π)

$\Rightarrow \quad V_1 \cdot V_2 = \|V_1\| \, \|V_2\| \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{V_1 \cdot V_2}{\|V_1\| \, \|V_2\|}$$

DA CUI α.



~~"Coseni direttori = coseni degli angoli che la retta forma con l'asse xy"~~

"Coseni direttori = coseni degli angoli che la retta orientata forma con l'asse x e y" ORIENTATI

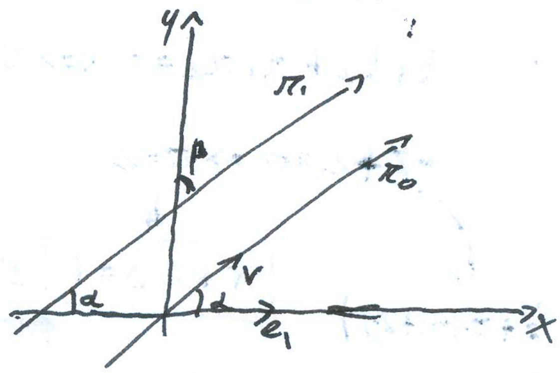
$\pi_1 = ax + by + c = 0 \qquad e_1 = (1,0)$

$\pi_0 = ax + by = 0$

$v = (b, -a)$

$v \cdot e_1 = \|v\| \cdot \|e_1\| \cos\alpha$

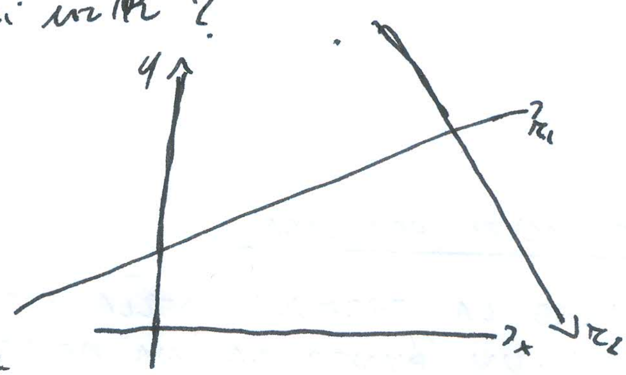
$\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ = 1° coseno direttore, analogamente si trova l'altro



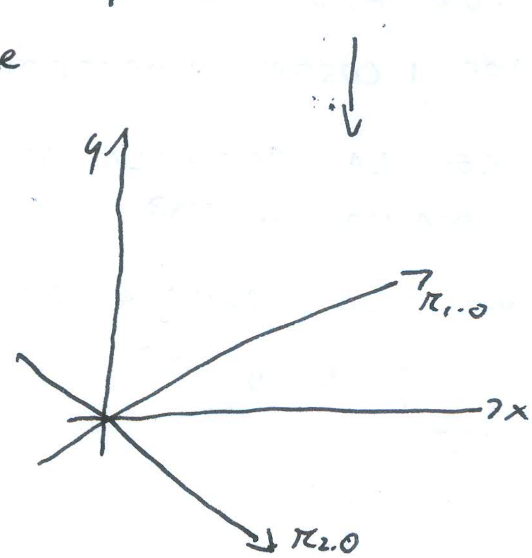
- Quando due rette, incidenti, sono perpendicolari in $\mathbb{R}^2$?

$\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$



- Porendo le direzioni delle rette
- traslo il punto di incontro sull'origine
- Prendo una base di $\pi_{1,0}$ e $\pi_{2,0}$ e vedo se sono ortogonali



$\pi_{1.0} = \langle\langle V_1 \rangle\rangle = \langle\langle \binom{b_1}{-a_1} \rangle\rangle$

$\pi_{2.0} = \langle\langle V_2 \rangle\rangle = \langle\langle \binom{b_2}{-a_2} \rangle\rangle$

$V_1 \cdot V_2 = b_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot a_2$

$\Rightarrow \boxed{a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0 \iff \pi_1 \perp \pi_2}$

L CONDIZIONE DI PEPENDICOLARITÁ

Esempio:

- Trovare $r \perp 2x-y+3=0$ passante per $P=\binom{1}{0}$

- Cerco il fascio di rette centrato in P prendendo le rette più semplici, ovvero $x=1$ e $y=0$ $\Rightarrow$ IL FASCIO È

$\lambda(x-1)+\mu y=0$

$\frac{\lambda(x-1)}{\lambda}+\frac{\mu y=0}{\lambda}$

$(x-1)+ty=0$ (ora abbiamo un solo parametro però manca la retta $y=0$ dal fascio)

- Usiamo la condizione di perpendicolarità:

$b_1 b_2 + a_1 a_2 = 0 \iff r_1 \perp r_2$

$$\underset{a_1}{2x}-\underset{b_1}{y}+3=0$$

$-t+2=0 \Rightarrow t=2$

$(=+t\cdot(-1)+2\cdot 1)$

$$(x-1)+ty=0 \Rightarrow \underset{a_2}{x}+\underset{b_2}{ty}=1$$

$\boxed{x+2y=1}$ è la retta perpendicolare

ritroviamo la formula $m_1=-\frac{1}{m_2}$

$r_1: m_1x+q_1 \to a_1x+b_1y+c_1$

$r_2: m_2x+q_2 \to a_2x+b_2y+c_2$

supponiamo $b_1 \neq 0$

$m=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1}y$

$m_1m_2=-1 \to m_1=-\frac{1}{m_2}$

$(a_1a_2=-b_1b_2)$

ESERCIZI PER CASA:

1) DARE LA FORMULA DELLA DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA IN $\mathbb{R}^2$

2) DARE I COSENI DIRETTORI DI UNA RETTA IN $\mathbb{R}^3$

3) DARE LA FORMULA DELLA DISTANZA DI UN PUNTO DA UN PIANO IN $\mathbb{R}^3$

4) DARE LA FORMULA DELLA DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA IN $\mathbb{R}^3$