6/11/2018

Sia $(V, +, \cdot\lambda)$ uno spazio vettoriale su un campo K

__Definizione__: dati $v_1, v_2, \dots, v_k \in V \Rightarrow$ la $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$ con $\alpha_i \in K \ \forall i = 1, \dots, k$ è detta __COMBINAZIONE LINEARE__ dei vettori $v_1, \dots, v_k$.

__Definizione 2)__: I vettori $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ si dicono __GENERATORI__ di V se ogni altro vettore $v \in V$ si può scrivere come loro combinazione lineare, cioè $\forall v \in V, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ tali che $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \Rightarrow V = \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$.

__Esempio__: $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ci chiediamo se sono generatori di $\mathbb{R}^2$.

dato $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \mid v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 ? \Rightarrow$ PONIAMO

$$(*) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ 3\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Adesso riconduciamo a sistema, UGUAGLIANDO LE ENTRATE CORRISPONDENTI:

$$\begin{cases} x = \alpha_1 - \alpha_2 \\ y = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 2 & 3 & y \end{array}\right) \xrightarrow{2R_1 - R_2 \to R_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & -5 & 2x-y \end{array}\right) \Rightarrow$$

(MATRICE COMPLETA)

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{-2x+y+5x}{5} \\ \alpha_2 = -\dfrac{2x-y}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{3x+y}{5} \\ \alpha_2 = \dfrac{y-2x}{5} \end{cases}$$

Se i conti sono corretti, sostituendo α_1 e α_2 otteniamo ~~dal~~ l'identità. $(*)$

Adesso ci chiediamo se $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono generatori di $\mathbb{R}^2$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 4 & y \end{array}\right) \xrightarrow{2R_1 - R_2 \to R_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 2x-y \end{array}\right)$$

Il sistema è risolubile solo se $2x - y = 0 \Rightarrow$

$$\exists \alpha_1, \alpha_2 \mid v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza i vettori __non__ sono generatori di $\mathbb{R}^2$ perché esistono in $\mathbb{R}^2$ vettori che non sono loro comb. lineari.

Adesso consideriamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

$$\begin{cases} x = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ y = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & x \\ 2 & 3 & 4 & y \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & x \\ 0 & -5 & 0 & 2x-y \end{array}\right)$$

Il sistema ha ∞^1 soluzioni (QUINDI I TRE VETTORI GENERANO $\mathbb{R}^2$), non abbiamo un numero preciso di generatori, ma abbiamo un numero minimo: PER ESEMPIO $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ NON GENERA $\mathbb{R}^2$.

Definizione: I vettori $v_1, \dots, v_k \in V$ si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI se, posto $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i = 1, \dots k$.

Esempio 1) $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ci chiediamo se sono linearmente indipendenti.

PONIAMO $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} : A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

CON $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ Abbiamo $\infty^0 = 1$ soluzione: $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$ POICHÉ $rg A = 2$ e # VARIABILI $= 2$

↳ i vettori sono linearmente indipendenti.

ESEMPIO 2) Consideriamo $v_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$: SONO LIN. INDIPENDENTI?

PONIAMO

↳ $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ È LA MATRICE DEL SISTEMA

$rg \Sigma_0 = 2 \Rightarrow$ Il sistema ha ∞^1 soluzioni: i vettori sono linearmente DIPENDENTI. PERCHÉ NON SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

Definizione: Un insieme di vettori di V, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, costituisce una BASE di V se i vettori di $\mathcal{B}$ sono generatori di V, linearmente indipendenti.

Esempio: $V = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $\mathbb{R}^2$? Sì

(abbiamo già dimostrato che questi vettori sono linearm. indipend.) E GENERATORI DI V

Esempio: $V = \mathbb{R}_2[x] = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

prendo $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ è base di $\mathbb{R}_2[x]$?

1) LINEARE INDIPENDENZA: PONGO, $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 x^2 = 0$; DUE POLINOMI SONO UGUALI SE HANNO LO STESSO GRADO E UGUALI COEFFICIENTI DEI MONOMI DI UGUAL GRADO

$\Longrightarrow$ equazione è verificata solo quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ PERCHE' IL POLINOMIO A DESTRA E' IL POLINOMIO NULLO.

$\rightarrow$ sono linearmente indipendenti i vettori $1, x, x^2$.

2) SONO GENERATORI ?

Dato $ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \mid$

$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = ax^2+bx+c$? PER L'UGUAGLIANZA DEI DUE POLINOMI, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\ \exists$, basta prendere $\alpha_1 = c$, $\alpha_2 = b$, $\alpha_3 = a$

$\rightarrow$ sì, sono generatori E QUINDI BASE DI $\mathbb{R}_2[x]$.

ESEMPIO: Adesso in $\mathbb{R}^2$ prendo i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è base di $\mathbb{R}^2$?

1) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ha $rg = 2 \Rightarrow \sum$ ha $\infty^0 = 1$ SOLUZIONE: QUELLA NULLA $\Rightarrow v_1, v_2$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

2) $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ CON $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x \\ 2 & 2 & y \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = x \\ 2\alpha_1 + 2x = y \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 = x \\ \alpha_1 = \frac{y-2x}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$\mathbb{R}^2 = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle \Rightarrow \mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ E' BASE DI $\mathbb{R}^2$.

Teorema: basi diverse di uno spazio vettoriale V, hanno lo stesso # di vettori.

Dimostrazione: PER ASSURDO, prendo $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots v_k\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots w_l\}$, $\boxed{k \neq l}$

Supponiamo inizialmente $k < l$ e $\mathcal{B}_1$ base di V

$\Rightarrow$ dimostro che $w_1, \dots w_l$ sono lin. indip.

PONGO $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots \alpha_l w_l = 0 \Rightarrow w_1 = \sum_{i=1}^{k} a_{i1} v_i$

$w_2 = \sum_{i=1}^{k} a_{i2} v_i, \dots, w_l = \sum_{i=1}^{k} a_{il} v_i$ POICHE' I VETTORI DI $\mathcal{B}_1$ GENERANO V:

$$\Rightarrow \alpha_1 \sum_{i=1}^{k} a_{i1} v_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^{k} a_{i2} v_i + \dots \alpha_l \sum_{i=1}^{k} a_{il} v_i = 0$$

RACCOLGO I v_i $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} + \dots + \alpha_l a_{1l}) v_1 +$$

$$+ (\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_l a_{2l}) v_2 + \dots + (\alpha_1 a_{k1} + \alpha_2 a_{k2} + \dots$$

$$+ \dots \alpha a_{kl}) v_k = 0$$ $\Rightarrow$ POICHÈ $v_1, v_2, \dots, v_k$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, ABBIAMO:

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} + \dots + \alpha_l a_{1l} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{k1} + \alpha_2 a_{k2} + \dots + \alpha_l a_{kl} = 0 \end{cases}$$

k equazioni
l incognite $\boxed{k < l}$

$\rightarrow$ $\exists$ soluzioni non nulle perchè $rg\,\Sigma$ < # variabili, ANCHE NEL CASO CHE SIA MASSIMO IL RANGO DEL SISTEMA Σ.

$\Rightarrow$ i w_j $\forall j = 1, \dots, l$, non sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ non possono formare una base.

ASSURDO perchè $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_l\}$ era base di V PER IPOTESI: ABBIAMO SBAGLIATO A SUPPORRE $k < l$ $\Rightarrow$ $k \not< l$; PUÒ ESSERE $k > l$? Prendiamo $k > l$ e rifacciamo lo stesso ragionamento, fissando come base $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots w_l\}$ e arriviamo a dimostrare che $\mathcal{B}_1$ non è base. ASSURDO, QUINDI $k \not> l$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{k = l}$

c.v.d

<u>Definizione</u>: la cardinalità di una base di uno spazio vettoriale V è detta <u>DIMENSIONE</u> di V.