ESEMPI DI COMBINAZIONE LINEARE

1) BARICENTRO

Supponiamo che nello spazio siano dati k corpi di dimensioni trascurabili di massa m_i per $i = 1, \dots, k$ e disposti nei punti v_i di coordinate (x_i, y_i, z_i) $i = 1, \dots, k$. Indichiamo con M la massa complessiva, $M = \sum_{i=1}^{k} m_i$. Il BARICENTRO o CENTRO DI MASSA è per definizione il vettore G:

$$G = \frac{m_1}{M} v_1 + \frac{m_2}{M} v_2 + \dots + \frac{m_k}{M} v_k$$

cioè la combinazione lineare dei vettori posizione $v_1, \dots, v_k$, con $v_i = (x_i, y_i, z_i)$

$$G = \frac{m_1}{M}(x_1, y_1, z_1) + \frac{m_2}{M}(x_2, y_2, z_2) + \dots + \frac{m_k}{M}(x_k, y_k, z_k)$$

$$= \left(\sum_1^k x_i \frac{m_i}{M}, \sum_1^k \frac{m_i}{M} y_i, \sum_1^k \frac{m_i}{M} z_i \right)$$

Il baricentro è un esempio di media pesata, ed è importante per diversi motivi: ad esempio

i) la forza di gravità è applicata al baricentro del corpo

ii) In un sistema isolato il baricentro si muove di moto rettilineo uniforme

iii) in generale il baricentro di un sistema soddisfa la legge di Newton $F = ma$, con F = risultante delle forze, m è la massa totale, a = accelerazione del baricentro

ii) MEDIA E MEDIA PESATA

Tre studenti $\overbrace{}^{A,B,C}$ sostengono due parti di un esame riportando i seguenti voti

STUDENTE	A	B	C
PRIMA PARTE	20	24	26
SECONDA PARTE	28	30	24

Questi dati si riportano in forma vettoriale $v_1 = (20, 24, 26)$ e $v_2 = (28, 30, 24)$. Il voto complessivo per ogni studente è la media aritmetica dei due voti, data dal vettore:

$$m_{1,2} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \left(\frac{20+28}{2}, \frac{24+30}{2}, \frac{26+24}{2}\right) = (24, 27, 25)$$

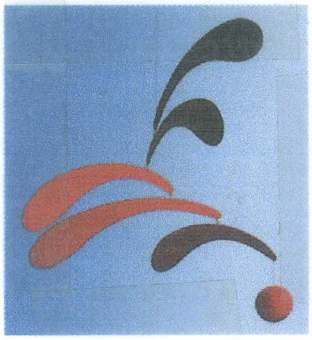
Se le due parti dell'esame hanno pesi diversi in crediti $\Rightarrow$ dobbiamo fare una combinazione lineare diversa: se la prima parte corrisponde a 5 crediti e la seconda 3 il voto del primo esame deve pesare $\frac{5}{8}$ del totale, il voto del secondo $\frac{3}{8}$ del totale: il voto finale si ottiene

$$\frac{5}{8} v_1 + \frac{3}{8} v_2 = (23 ; 26,25 ; 25,25)$$

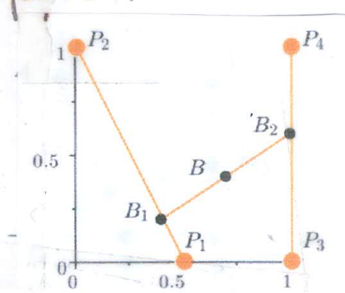
ESEMPIO DI COMBINAZIONE LINEARE

iii) Sculture cinetiche

L'artista "cinetico" A. CALDER (1896 - 1976) ha realizzato molte sculture composte da più elementi, nelle quali la posizione dei baricentri hanno un ruolo importante. La scelta dei punti di sospensione rende possibile il movimento delle parti senza perdere la stabilità complessiva.



Schematizziamo una sua opera: 4 punti pesanti con coordinate $P_1 = (\frac{1}{2}, 0)$; $P_2 (0,1)$; $P_3 = (1,0)$ e $P_4 = (1,1)$ sono uniti a coppie da asticelle di massa trascurabile.



Le asticelle sono unite da un'ulteriore asta $B_1 B_2$ e tutta la struttura è sospesa per il punto B. I pesi dei punti sono diversi: P_1 pesa 4, P_2 pesa 1, P_3 pesa 2, P_4 pesa 3.
La struttura è stabile se B_1 è il baricentro di $P_1 P_2$ e B_2 è il baricentro di $P_3 P_4$ e B è il baricentro complessivo del sistema. Calcoliamo dove cade B!

La massa di $P_1 P_2$ è $5 \Rightarrow B_1 = \frac{4}{5} P_1 + \frac{1}{5} P_2 =$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \frac{1}{5}(0,1) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

La massa complessiva di $P_3 P_4$ è $5 \Rightarrow B_2 = \frac{2}{5} P_3 + \frac{3}{5} P_4$

$$= \frac{2}{5}(1,0) + \frac{3}{5}(1,1) = \left(1, \frac{3}{5}\right)$$

La massa complessiva di $B_1 B_2$ è $10 \Rightarrow B = \frac{5}{10} B_1 + \frac{5}{10} B_2$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(1, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{10}, \frac{4}{10}\right)$$

7.11.2018

Esempio pratico di combinazione lineare

In $\mathbb{R}^3$ si prendono k corpi fisici di dimensioni trascurabili e di massa m_i, $i = 1, \dots, k$ disposti in k punti di $\mathbb{R}^3$ di coordinate $V_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, k$ $\Rightarrow$ indicata con $M = \sum_{i=1}^{k} m_i$ la massa complessiva $\Rightarrow$ Il baricentro (o centro di massa) del sistema formato dai k corpi è per definizione il vettore $G = \frac{m_1}{M} V_1 + \frac{m_2}{M} V_2 + \dots + \frac{m_k}{M} V_k$; G È DUNQUE UNA COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI V_i.

Se # di una base di uno spazio V è finita $\Rightarrow$ V è spazio vettoriale di dimensione finita

ESEMPIO: $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n, $\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3 ; $M_{p \times n}$ ha dim finita

Esempio: $\mathbb{R}[x]$ è spazio vettoriale di dimensione infinita, così come $\mathcal{C}^0_{[a,b]}$

SI PONE dimensione $\emptyset = -1$

OSSERV. In V spazio vettoriale su K, $v = 0$ è sempre linearmente dipendente rispetto a qualunque insieme di vettori

INFATTI Dati $v_1, \dots, v_k, 0 \in V \Rightarrow$ posto $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} 0 = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1}$ può essere qualunque scalare anche $\neq 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_k, 0$ sono linearmente dipendenti.

1) Considero $v_1, v_2 \in V$ linearmente indipendenti $\Rightarrow$ posto $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$, v_1 non è multiplo di v_2

II) Considero $v_1, v_2 \in V$ linearmente dipendenti, con $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0 \Rightarrow v_1$ é multiplo di v_2 e viceversa

DIM. II) "$\Rightarrow$" v_1, v_2 sono linearmente dipendenti $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ posto $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow \exists\ \alpha_1 \neq 0$ e/o $\alpha_2 \neq 0$ che verificano l'equazione

Se $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{1}{\alpha_1} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_1}(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0$

$\Rightarrow V_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} V_2$ QUINDI V_1 È MULTIPLO DI V_2

"$\Leftarrow$" $\exists\ a \in K$ tale che $v_1 = a v_2 \Rightarrow v_1 - a v_2 = 0$

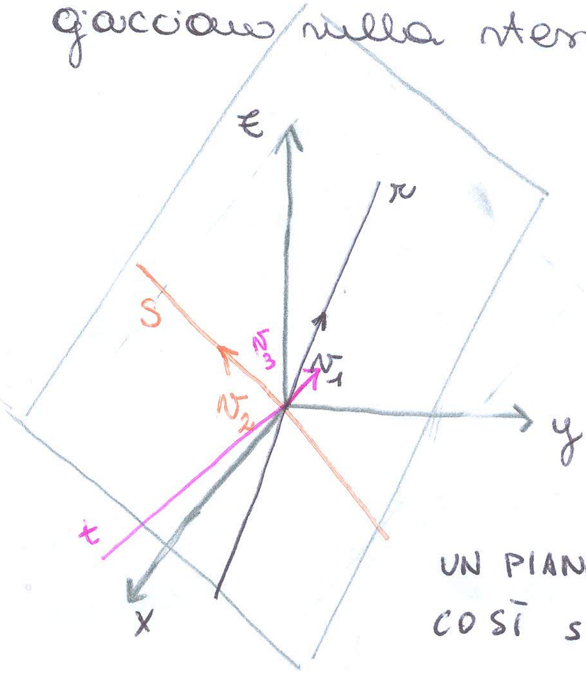
$\Rightarrow v_1$ e v_2 sono linearmente ~~dipendenti~~ dipendenti ~~sono~~ ~~multipli~~

C.V.D.

II) $\Rightarrow$ I) banale

ANALIZZIAMO IL SIGNIFICATO DELLA LINEARE DIPENDENZA DA UN PUNTO DI VISTA GEOMETRICO

Quando due vettori sono linearmente dipendenti giacciono sulla stessa retta



$\langle\langle V_1 \rangle\rangle = r$

SE V_1 e V_2 sono linearmente indipendenti non giacciono sulla stessa retta ~~(...)~~ e GENERANO UN PIANO, $\langle\langle V_1, V_2 \rangle\rangle = \pi$.

COSÌ SE PRENDIAMO 3 VETTORI LINEARM. INDIP. $V_1, V_2, V_3 \Longrightarrow \langle\langle V_1, V_2, V_3 \rangle\rangle = \mathbb{R}^3$

<u>Proposizione</u>: Sia $V = \langle\langle v_1, \dots, v_q \rangle\rangle$ e consideriamo $w_1, \dots, w_p \in V$, con $p > q \Rightarrow w_1, \dots, w_p$ sono linearmente dipendenti. (DIMOSTRARLO PER ESERCIZIO)

<u>Proposizione</u>: Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, dim $V = n$.

$\Rightarrow$ ogni $v \in V$ si scrive in <u>modo unico</u> come combinazione lineare dei vettori di B

<u>dimostrazione</u>: v è <u>sempre</u> combinazione lineare dei vettori di B, perché generatori, $\underbrace{\text{per assurdo}}_{\text{DIM. CHE È UNICA RAGIONANDO}}$: SUPPONIAMO CHE NON SIA unica, cioè $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$ (con $\alpha_i \neq \beta_i$ per almeno un i)

$\Rightarrow$ essendo i v_i linearmente indipendenti $\Rightarrow \alpha_i - \beta_i = 0$ $\forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$ $\forall i = 1, \dots, n$ ASSURDO perché per ipotesi $\alpha_i \neq \beta_i$ per almeno un $i \in \{1, \dots, n\}$

QUINDI LA COMBINAZIONE, FISSATA LA BASE, È UNICA. c.v.d.

<u>Esempio</u> $\exists$ in $\mathbb{R}^n$ una base detta BASE CANONICA i cui vettori sono chiamati $e_1, \dots, e_n$ e così rappresentati

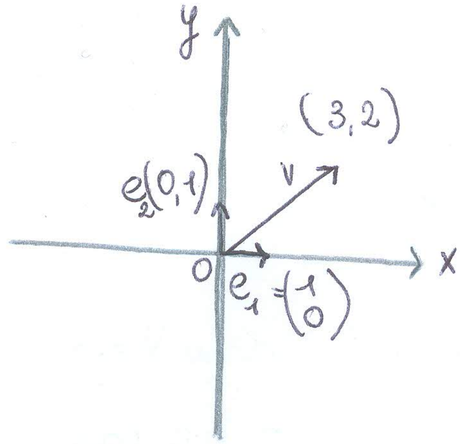
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio in $\mathbb{R}^3$: prendo la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ voglio esprimere e_1 come loro combinazione lineare: $e_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$

$\Rightarrow e_1 = 1 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3$

$e_2 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3$; $e_3 = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3$



$\Rightarrow V = 3e_1 + 2e_2$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

Se la base è canonica $\Rightarrow$ le coordinate del vettore sono esattamente i coefficienti della combinazione lineare.

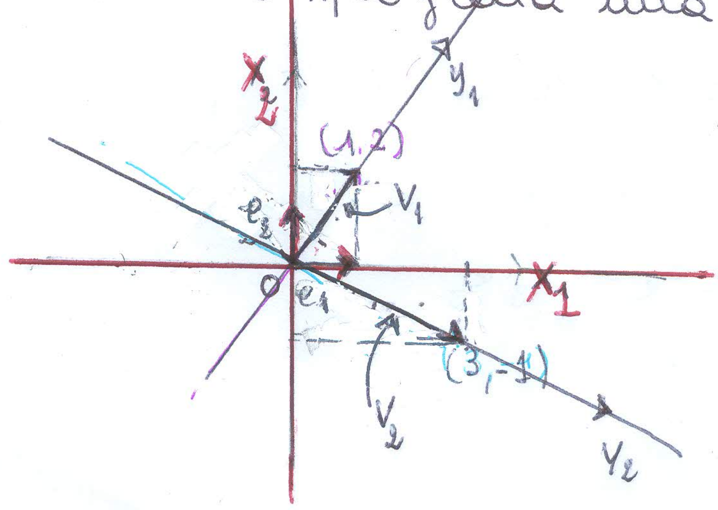
Prendo in $\mathbb{R}^2$ la base $B = \{v_1, v_2\}$ con $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ perché sono linearmente indipendenti E LA DIMENSIONE DI $\mathbb{R}^2$ È 2 E QUINDI LA CARDINALITÀ DI OGNI BASE È 2.

sistema per la lineare indipendenza:

$$\left[A\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ con } A = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{pmatrix} \right]$$ A ha rg MAX = 2 $\Rightarrow$ 1 soluz. QUELLA NULLA!

Questi vettori sono scritti nella base canonica;
i due vettori sono espressi nella base canonica se non esplicitamente specificata una base differente.

$\Rightarrow$



NUOVA BASE = NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO
IL SISTEMA Y_1, Y_2

considero $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ voglio conoscerlo nel riferimento espresso dalla base $\{v_1, v_2\}$, cambio sistema di riferimento e dunque coordinate; devo trovare i coefficienti della combinazione lineare che esprime v.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = -1 \\ 2\alpha - \beta = 2 \end{cases}$$

Ha soluzione sempre, nonostante il cambio di base? sì, ~~xxx~~ $rg = 2$ (rg MAX $\Rightarrow$ 2 PIVOT $\Rightarrow$ sistema risolubile

$$\begin{cases} \alpha = -1 - 3\beta \\ -2 - 7\beta = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = -\frac{4}{7} \\ \alpha = -1 + \frac{12}{7} = \frac{5}{7} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ v nella nuova base ha coordinate $\begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$