proposizione (metodo di Jacobi)

Sia $Q: V \to \mathbb{R}$ forma quadratica, $\dim V = n$, sopponiamo che i minori di N-O della matrice associata a Q in una base B_V di V siano tutti non nolli (cioè se d_k, $k=1 \dots n$, sono i determinanti delle sottomatrici determinate dalle prime k righe e k colonne della matrice, sono tali che $d_k \neq 0$ $\forall k = 1, \dots n$) $\Rightarrow \exists$ una base di V, $\tilde{B}_V$, tale che

$$[Q]_{\tilde{B}_V} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & 0 \\ & \frac{d_2}{d_1} & & & \\ & & \frac{d_3}{d_2} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Ne conseguono dei criteri per determinare la segnatura di Q

1) (criterio di positività) $Q: V \to \mathbb{R}$ è definita positiva $\Leftrightarrow$ i minori principali di N-O di una matrice $[Q]_{B_V}$ sono tutti positivi

Ricordo che Q definita positiva significa che $Q(v) > 0$ $\forall v \neq 0$, quindi, tutti gli elemen della diagonale della matrice $[Q]_{B_V}$ sono positivi

Se $Q(v_j) > 0$ $\forall v_j \in B_V \Rightarrow Q(v) > 0$ $\forall v \neq 0$?
sì perché V è combinazione lineare dei vettori di base: $V = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$
$\Rightarrow$ per come è definita la forma quadratica:

$$Q\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 Q(v_j) > 0$$ (il passaggio intermedio consiste nella forma polare)

2) Q è semidefinita positiva $\Leftrightarrow$ tutti i minori principali sono non negativi

3) (criterio di negatività) Q è definita negativa $\Leftrightarrow$ i minori principali di N-O (nord-ovest), indicati con d_k, sono positivi per k pari e negativi per k dispari

esempio

Se $Q: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tale che $[Q]_{B_V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Q è definita positiva e,

di conseguenza, la segnatura della forma quadratica è (4,0)

$\Rightarrow$ nella base B_V con coordinate y_1, y_2, y_3, y_4 di $\mathbb{R}^4$ $\Rightarrow$ la forma canonica di Q è
$Q(v) = y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2 + 4y_4^2$, in quanto $Q(v) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \cdot [Q]_{B_V} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

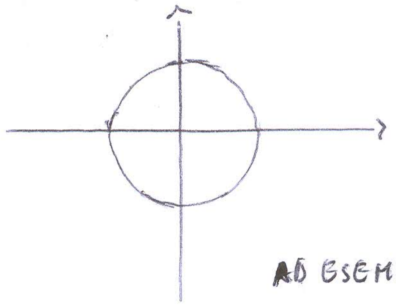
esempio

$Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.c. $[Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, per il teorema di Jacopi posso dire che Q è definita positiva POICHE $d_1 = 1 > 0$ e $d_2 = 4 > 0$ $\Rightarrow$ LA SEGNATURA SARÀ (2,0)

$\exists\ \tilde{B}_{\mathbb{R}^2}$ tale che (NELLE COORDINATE DI $\mathbb{R}^2$ CON BASE $\tilde{B}_{\mathbb{R}^2}$), $Q(v) = x_1^2 + x_2^2$

Se considero $x_1^2 + x_2^2 = 1$, frutto della riduzione della forma quadratica a forma canonica, bisogna disegnarla. È richiesto, tuttavia, disegnarla nella base iniziale. Ad esempio:

$$2x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_1 + 6x_2 + 3 = 0$$



la circonferenza è la medesima, ma il sistema di riferimento è quello nuovo, finale, ossia quello che è stato trovato

ma bisogna ritornare al vecchio sistema di riferimento AD ESEMPIO traslando O RUOTANDO IL SISTEMA.

Per riuscire a disegnare le coniche, dunque, abbiamo bisogno della forma canonica. Quest'ultima ci permette di classificare le coniche. Posso, poi, disegnarla nel nuovo sistema di riferimento e infine si deve ritornare al vecchio sistema di riferimento attraverso le basi

METODO DI GAUSS RIDUZIONE DI UNA F. QUADRATICA A FORMA CANONICA

In generale valgono: $x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$,

e mettendo più variabili: $x^2 + 2axy = (x+ay)^2 - a^2y^2$,

INOLTRE $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$

Vediamo come ci servono queste uguaglianze per il metodo DI RIDUZIONE di Gauss.

Usiamo l'induzione sul # di variabili:

1) $n = 1$ ovvero $Q(x) = \alpha x^2$ (è già forma canonica)

2) supponiamo di poter ridurre a forma canonica una forma quadratica $Q(v)$ in uno spazio fino alla dimensione $n-1$ e vogliamo farlo con n variabili:

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_j x_i x_j$$

• *primo caso*

supponiamo che $\exists\, \alpha_{jj} \neq 0$ e che tale $j = 1$ $\Rightarrow$

$$Q(x) = \alpha_{11}x_1^2 + L(x_2, \dots, x_n)x_1 + \tilde{Q}(x_2, \dots, x_n)$$

con L forma lineare e $\tilde{Q}$ forma quadratica

Applico ai primi due termini la differenza di quadrati, raccogliendo prima α_{11}:

$$Q(x) = \alpha_{11}\left(x_1^2 + \frac{L(x_2, \dots, x_n)x_1}{\alpha_{11}}\right) + \tilde{Q}(x_2, \dots, x_n)$$

$$\overset{!}{=} \alpha_{11}\left[\left(x_1 + \frac{L(\,)}{2\alpha_{11}}\right)^2 - \frac{L(\,)^2}{4\alpha_{11}^2}\right] + \tilde{Q}(x_2, \dots, x_n)$$

$$\overset{!}{=} \alpha_{11}\left(x_1 + \frac{L(\,)}{2\alpha_{11}}\right)^2 - \frac{L(\,)^2}{4\alpha_{11}} + \tilde{Q}(x_2, \dots, x_n)$$

$\Rightarrow$ segue

Faccio un cambiamento di coordinate:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{L()}{2\alpha_{11}} \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases} \Rightarrow Q(y) = \alpha_{11} y_1^2 + \frac{L(y_2, \dots, y_n)^2}{4\alpha_{11}} + \tilde{Q}(y_2, \dots, y_n)$$

$\Rightarrow$ per ipotesi induttiva $\frac{L}{4\alpha_{11}} + \tilde{Q}$ può essere ridotta a somma algebrica di quadrati

e quindi Q è somma algebrica di quadrati

- secondo caso

Supponiamo che $\alpha_{jj} = 0 \ \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow$ POSSIAMO SUPPORRE

$Q(x) = \alpha_{12} x_1 x_2 + L_1(x_3, \dots, x_n) x_1 + L_2(x_3, \dots, x_n) \cdot x_2 + \tilde{Q}(x_3, \dots, x_n)$

con L_1 e L_2 forme lineari e $\tilde{Q}$ forma quadratica

$$\Rightarrow Q(x) = \alpha_{12}\left(x_1 + \frac{L_2}{\alpha_{12}}\right) \cdot \left(x_2 + \frac{L_1}{\alpha_{12}}\right) - \frac{L_1(x_3, \dots, x_n) \cdot L_2(x_3, \dots, x_n)}{\alpha_{12}} + \tilde{Q}(x_3, \dots, x_n)$$

$\Rightarrow$ opero un cambiamento di coordinate:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{L_2}{\alpha_{12}} \\ y_2 = x_2 + \frac{L_1}{\alpha_{12}} \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases} \Rightarrow Q(y) = \alpha_{12} y_1 y_2 - \frac{L_1(y_3, \dots, y_n) L_2(y_3, \dots, y_n)}{\alpha_{12}} + \tilde{Q}(x_3, \dots, x_n)$$

$$Q(y) = \alpha_{12} \frac{(y_1 + y_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}{4} - \frac{L_1 L_2}{\alpha_{12}} + \tilde{Q}$$ $\Rightarrow$ cambio le coordinate:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = y_1 - y_2 \\ z_3 = y_3 \\ \vdots \\ z_n = y_n \end{cases} \Rightarrow Q(z) = \frac{\alpha_{12} z_1^2}{4} - \frac{\alpha_{12} z_2^2}{4} - \frac{L_1 L_2}{\alpha_{12}} + \tilde{Q}$$

per ipotesi induttiva $-\frac{L_1 L_2}{\alpha_{12}} + \tilde{Q}$ si riduce a somma di quadrati

$\Rightarrow Q(z)$ è ridotta a somma di quadrati

c.v.d.

esempio

Sia data $Q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$ con base canonica in $\mathbb{R}^3$

Riduzione a forma canonica con Gauss:

$Q(x) = x_1^2 + 2x_1(-2x_2 + x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + (-2x_2 + x_3))^2 - (-2x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 + x_3^2 =$

$= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + 4x_2x_3$

$\Rightarrow$ cambio di coordinate: $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

$\Rightarrow Q(y) = y_1^2 + 4y_2y_3$

$Q(y) = y_1^2 + (y_2 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2$

$\Rightarrow$ secondo cambio di coordinate: $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_2 - y_3 \end{cases}$

$\Rightarrow Q(z) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$

$\Rightarrow$ la segnatura è $(2, 1)$

Il cambio di coordinate è TOTALE: $\begin{cases} z_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ la base finale rispetto alla quale Q è in forma canonica è:

$B = \{(1, 0, 0)^T, (1/2, 1/2, 1/2)^T, (3/2, 1/2, -1/2)^T\}$

Essa ci dà anche la matrice del cambio di base S:

$S = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ è tale che $[Q]_B = S^T [Q]_e S \Rightarrow$

$\Rightarrow$ che è uguale alla matrice diagonale, fatta così:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$