9/10/18

Definizione: una matrice quadrata è detta TRIANGOLARE SUPERIORE se, posta $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $a_{ij}=0 \ \forall i>j$.

Esempio: $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

In una matrice quadrata è individuata quella che è detta DIAGONALE PRINCIPALE formata dalle entrate $a_{ii} \ \forall i=1,\dots,n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Conseguenza: una matrice $A_{n\times m}$ è triangolare superiore se tutte le entrate "al di sotto" della diagonale principale sono nulle.

Definizione: una matrice quadrata è detta TRIANGOLARE INFERIORE se, posta $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $a_{ij}=0 \ \forall i<j$.

Esempio: $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

~~Definizione~~ Conseguenza: una matrice $A_{n\times m}$ è triangolare inferiore se tutte le entrate "al di sopra" della diagonale principale sono nulle.

Definizione: TRACCIA di una matrice $A \in M_{n\times m}$ è $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A \quad \rightarrow \operatorname{Tr} A = 15$

Definizione: una matrice quadrata $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ è detta DIAGONALE se $a_{ij}=0 \ \forall i \neq j$.

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \exists$ una matrice NULLA $\forall$ ordine $n$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (É sia triangolare superiore sia triangolare inferiore.)

Definizione: data $A \in M_{p \times n}$ con $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}} \Rightarrow$ si dá una nuova matrice detta TRASPOSTA di $A$ e si indica con $A^T$ (oppure ${}^TA$, ${}^tA$, $A^t$, $A'$), che appartiene a $M_{n \times p}$ ed é cosí fatta: $A^T = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$ con $b_{ij} = a_{ji}$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

Definizione: una matrice quadrata $A \in M_{n \times m}$ é detta SIMMETRICA se coincide con la sua trasposta.

Definizione: Le entrate di una matrice simmetrica verificano le proprietà $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j = 1, \dots, n$.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \pi \\ -1 & \pi & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

$a_{11} = 1$ $\qquad a_{22} = 0$

$a_{12} = \sqrt{2} = a_{21}$ $\qquad a_{23} = a_{32} = \pi$

$a_{13} = -1 = a_{31}$ $\qquad a_{33} = 1$

---

Considero l'insieme delle matrici $p \times n$ $M_{p \times n}$.

Definiamo la somma di due matrici $A, B \in M_{p \times n}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}}$ e $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}}$ come la matrice $C \in M_{p \times n}$ tale che

$C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}}$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ \forall i,j$.

Indico $C = A \hat{+} B$.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times3}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times3}$ $\Rightarrow A \hat{+} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

$\hat{+}$ gode della proprietà associativa?

Date $A, B, C \in M_{p\times n} \Rightarrow (A \hat{+} B) \hat{+} C = A \hat{+} (B \hat{+} C)$

$A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$ $C = (c_{ij})$

$A \hat{+} B = (a_{ij} + b_{ij})$

$A \hat{+} B \, (a_{ij} + b_{ij}) \hat{+} (c_{ij}) = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})$

$B \hat{+} C = (b_{ij} + c_{ij})$

$\Rightarrow (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) \ \forall i,j$ ?

$\Longrightarrow$ Sì, $\hat{+}$ gode della proprietà associativa perché la somma tra numeri reali gode della proprietà associativa.

---

$\exists$ elemento neutro per $\hat{+}$? Sì $0 \in M_{p\times n}$ matrice nulla

$B \hat{+} C = (b_{ij} + c_{ij})$

Sia $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}}$ $\Rightarrow A \hat{+} 0 = (a_{ij} + 0) \underset{?}{=} (a_{ij}) = A$

$\left.\begin{array}{l} \text{Data } A \ \exists -A \text{ opposta di } A, \ -A = (-a_{ij}). \\ \text{Vale la proprietà commutativa } A \hat{+} B = B \hat{+} A \ \forall A,B \end{array}\right\}$ da dimostrare.

PRODOTTO PER UNO SCALARE

$$\cdot_\alpha \quad \mathbb{R} \times M_{p\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{p\times n}(\mathbb{R})$$
$$(\alpha, A) \longmapsto \alpha A$$

$$\hat{+} : M_{p\times n} \times M_{p\times n} \longrightarrow M_{p\times n}$$
$$(A, B) \longmapsto A \hat{+} B$$

dove $\alpha A$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é cosí definito: se $A = (a_{ij}) \Rightarrow \alpha A = (\alpha a_{ij})$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

$\exists$ elemento neutro $\boxed{\alpha = 1}$.

Proprietá associativa $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$? $A = (a_{ij}) \Rightarrow ((\alpha\beta)a_{ij}) = (\alpha(\beta a_{ij}))$

Proprietá distributiva del prodotto per uno scalare rispetto a $\hat{+}$
cioé $\alpha(A \hat{+} B) = \alpha A \hat{+} \alpha B$

$$\alpha(A \hat{+} B) = (\alpha(a_{ij} + b_{ij})) = (\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij})$$

---

PRODOTTO "RIGA X COLONNA" $M \times M \rightarrow M$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

$1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3(-1) = 6$

$1\cdot 2 + 2\cdot 5 + 3(-2) = 6$

$1\cdot 3 + 2\cdot 6 + 3(-1) = 12$

$$\Rightarrow A \hat{\cdot} B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Posso eseguire il prodotto solo se il numero di colonne della prima matrice é uguale al numero di righe della seconda matrice.

Definizione: il prodotto tra una matrice $A = (a_{ij})_{p\times n}$ con una matrice $B = (b_{ij})_{n\times k}$ é una matrice $C = A \hat{\cdot} B = (c_{ij})_{p\times k}$ con

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{lj}$$

DIMOSTRARE CHE IL PRODOTTO TRA MATRICI NON VERIFICA LA PROPRIETA' COMMUTATIVA