11/12/18

Proposizione

Dati U, V, W spazi vettoriali su K campo e $L: U \to V$ e $T: V \to W$ applicazioni lineari $\Rightarrow$ se $\exists$, $T \circ L$ $U \to W$ è lineare

Dim: Dobbiamo dimostrare che dati $u_1, u_2 \in U$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in K$

$$\Rightarrow (T \circ L)(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 (T \circ L)(u_1) + \alpha_2 (T \circ L)(u_2)$$

$T(L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2))$ = per la linearità di L = $T(\alpha_1 L(u_1) + \alpha_2 L(u_2))$

= per la linearità di T

$= \alpha_1 T(L(u_1)) + \alpha_2 T(L(u_2)) = \alpha_1 (T \circ L) + \alpha_2 (T \circ L)(u_2)$ c.v.d.

Proposizione

Data $L: V \to W$ lineare $\Rightarrow$

1. $L(0_V) = 0_W$
2. $L(-v) = -L(v)$
3. Se $U < V \Rightarrow L(U) < W$ In particolare $\operatorname{Im} L = L(V)$ è sotto sp. vett. di W
4. $\operatorname{Ker} L$ è sottospazio vettoriale di V

Dim 1: $L(0_V) + \underbrace{L(0_V)}_{\text{è lo } 0 \text{ di } W} = L(0_V + 0_V) = L(0_V) + 0_W$

Sommiamo ad entrambi i membri di $L(0_V) + L(0_V) = L(0_V) + 0_W$, l'elemento: $-L(0_V)$

ottengo $\underbrace{(-L(0_V) + L(0_V))}_{0_W} + L(0_V) = \underbrace{-L(0_V) + L(0_V)}_{} + 0_W$

$0_W + L(0_V) = \quad = 0_W + 0_W \Rightarrow$

$L(0_V) = 0_W$. c.v.d (Vale per qualsiasi tipo di morfismo)

Dim 2 : $L(-v) = -L(v) \quad \forall v \in V$ (da fare per casa)

Dim 3 : Sia $\mathcal{U} < V \Rightarrow$ devo dimostrare che $L(\mathcal{U})$ è chiuso rispetto alle operazioni di W e che $0_W \in L(\mathcal{U})$: poiché $0_V \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow L(0_V) \in L(\mathcal{U})$ e $L(0_V) = 0_W$

presi $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in K \Rightarrow L(u_1), L(u_2) \in L(\mathcal{U})$

$\Rightarrow$ devo dimostrare che $\alpha_1 L(u_1) + \alpha L(u_2) \in L(\mathcal{U})$

$\Rightarrow \alpha_1 L(u_1) + \alpha_2 L(u_2) = L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \in L(\mathcal{U})$ CHE DUNQUE È SOTTOSPAZIO VETTORIALE. Caso particolare del precedente: $\mathcal{U} = \mathrm{Im}\, L$

Dim 4 : $\ker L$ = nucleo $= \{ v \in V \mid L(v) = 0_W \} \subset V$

$0_V \in \ker L$? già dimostrato

$\forall v_1, v_2 \in \ker L, \forall \alpha_1 \alpha_2 \in K \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \ker L$

Voglio dimostrare $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =$ per la linearità di L

$= \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) = \alpha_1 0_W + \alpha_2 0_W = 0_W$

$\hookrightarrow$ il nucleo è chiuso rispetto all'operazione introdotto in V

Proposizione

Sia $L: V \to W$ lineare, supponiamo $\dim V = n$ e $\dim W = p$

Se $\ker L = \{0\} \Rightarrow L$ mappa elem. lin. indip. in elem. lin. indip.

Dim: Siano $v_1, \dots, v_k$ vettori di V lin indip.

$\Rightarrow$ Voglio dimostrare che $L(v_1), \dots, L(v_k)$ sono vett. di W lin. indip. $\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \alpha_j L(v_j) = 0_W$

$\hookrightarrow$ voglio che $\alpha_j = 0 \ \forall j = 1, \dots, k$

$\sum \alpha_j L(v_j) =$ per la linearità di L $= L\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j\right) = 0_W$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j \in \ker L$

$\Rightarrow$ per ipotesi $\sum \alpha_j v_j = 0_V \Rightarrow$ poiché $v_1, \dots, v_k$ sono lin indip.

$\Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$ c.v.d.

Proposizione

Sia $L: V \to W$ lineare $\Rightarrow$ L è iniettiva $\overset{\text{se e solo se / condiz. necess. e suffic.}}{\Longleftrightarrow}$ $\ker L = \{0\}$

<u>Dim</u>: "$\overset{\text{NECESSITÀ}}{\Rightarrow}$" Sia $v \in \ker L \Rightarrow L(v) = 0_W$ ho dimostrato che anche $L(0_V) = 0_W \Rightarrow L(v) = L(0_V) \to$ poiché L è iniettiva $\Rightarrow$ $\underline{v = 0_V}$

"$\overset{\text{SUFFICIENZA}}{\Leftarrow}$" (sufficienza) siano $v_1, v_2 \in V$ tali che $L(v_1) = L(v_2)$

$L(v_1) - L(v_2) = 0_W \to$ sfrutto la linearità $\to L(v_1 - v_2) = 0_W$

$v_1 - v_2 \in \ker L \Rightarrow$ per ipotesi $v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow \underline{v_1 = v_2}$

c.v.d

(abbiamo dimostrato l'iniettività)

Definizione di INVERTIBILITÀ

Sia $L: V \to W$ lineare $\Rightarrow$ L è invertibile se $\exists$ l'applicazione inversa L^{-1}, con $L^{-1}: W \to V$, tale che $L \circ L^{-1}: W \to W$ con $L \circ L^{-1} = id_W$ e $L^{-1} \circ L: V \to V$ deve essere uguale a id_V; L^{-1} è lineare.

Proposizione

Un'applicazione lineare biettiva è invertibile

<u>Dim</u>: data $L: V \to W$ lineare e biettiva $\to$ l'applicazione inversa per definizione è ben definita

$\hookrightarrow L^{-1}: W \to V \mid L^{-1}(w) = v \Longleftrightarrow L(v) = w$

$\Rightarrow L^{-1}$ ha W come dominio perché L è suriettiva e v è unico per il w preso in W perché L è iniettiva

(Dimostrare la linearità di L^{-1} per casa)

Definizione di OPERATORE o ENDOMORFISMO

$L: V \to V$ lineare è chiamato operatore / endomorfismo

ES: Dimostrare che $\{L: V \to W \text{ lineare}\}$ è uno spazio vettoriale su K campo di V e W con le operazioni di "somma" e "moltiplicazione per uno scalare"

Tale spazio vettoriale si indica con $\underline{\underline{Hom(V,W)}}$ o $\underline{\underline{\mathcal{L}(V,W)}}$

$\downarrow$

spazio vett. su K

TEOREMA DELLE DIMENSIONI

Sia $L: V \to W$ lineare $\Rightarrow \dim V = \dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L$

Dim: Pongo $\dim V = n$, $\dim W = k$, $\dim \ker L = p$, $\dim \operatorname{Im} L = q$ con $p \leq n$ e $q \leq k$

$B_{\ker L}\ \{u_1, \dots, u_p\}$ e $B_{\operatorname{Im} L} = \{w_1, \dots, w_q\}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{voglio dimostrare che } \{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\} \text{ è base di } V}$ *

• Sia $w \in \operatorname{Im} L \Rightarrow w = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j w_j$ inoltre $\exists\ v_1, \dots, v_q$ elementi di V tali che $L(v_j) = w_j \ \forall j = 1, \dots, q$ *

$\hookrightarrow$ analogamente $\exists\ v \in V$ tale che $L(v) = w \Rightarrow L(v) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j L(v_j)$

$\Rightarrow L(v) - \sum_{j=1}^{q} \alpha_j L(v_j) = 0_W$

$\Rightarrow$ per la linearità di $L \Rightarrow$ a sinistra avremo $L\left(v - \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v_j\right)$ che è uguale a 0_W

$\Rightarrow v - \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v_j \in \ker L \Rightarrow v - \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{p} \beta_j u_j$

$\Rightarrow v = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v_j + \sum_{j=1}^{p} \beta_j u_j \Rightarrow V = \langle\langle v_1, \dots v_q, u_1, \dots, u_p \rangle\rangle$

$\hookrightarrow$ sono vettori generatori

Dobbiamo dimostrare che i vettori $v_1, \dots, v_q, u_1, \dots, u_p$ sono lin. indip. e quindi formiamo una base di V

Considero (*) $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j v_j + \sum_{j=1}^{p} \rho_j u_j = 0_V \Rightarrow L(\sum \lambda_j v_j + \sum \rho_j u_j) = L(0_V)$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{q} \lambda_j L(v_j) + \sum_{j=1}^{p} \rho_j L(u_j) = 0_W \Rightarrow$ essendo $L(u_j) = 0_W \ \forall j = 1, \dots, p$

si ha che $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j L(v_j) = 0_W$

$\Rightarrow$ essendo $L(v_j) = w_j \ \forall j = 1, \dots, q$ si ha $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j w_j = 0$ essendo

$w_1, \dots, w_q$ lin. indip $\Rightarrow \lambda_j = 0 \ \forall j = 1, \dots, q$

$\Rightarrow$ Sostituendo $\lambda_j = 0$ nella combinazione lineare in esame (*),

rimane $\sum_{j=1}^{p} \rho_j u_j = 0_V$ ma essendo $u_1, \dots, u_p$ lin. indip.

i $\rho_j = 0 \ \forall j = 1, \dots, p \Rightarrow \{v_1, \dots, v_q, u_1, \dots, u_p\}$ è base di V

$\Rightarrow \boxed{\dim V = p + q = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L}$ c.v.d.

Conseguenze
1. $\exists\ L : V \to W$ lineare iniettiva se $\dim V > \dim W$?
2. $\exists\ L : V \to W$ lineare suriettiva se $\dim V < \dim W$?
3. $\exists$ isomorfismo tra spazi vettoriali solo se gli spazi hanno la stessa dimensione