DOMANDA: Esistono applicazioni (LINEARI) iniettive $L: V \to W$ se $\dim V > \dim W$

La dimensione dell'immagine è sempre minore della dimensione di W. Se L è iniettiva la dimensione del nucleo è nulla e quindi (LA DIMENSIONE DI V) è uguale alla dimensione dell'immagine.

$$\dim V = \dim Im(L) \leq \dim W$$ (TEOREMA DIMENSIONI $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim V = \dim Ker(L) + \dim(Im_L)$$ CON $\dim Ker(L) = 0$)

QUINDI NON $\exists$ APPLICAZIONI INIETTIVE SE $\dim V > \dim W$!

Non esistono suriettive se $\dim V < \dim W$!

DI CONSEGUENZA:

Se due spazi sono isomorfi i due spazi devono avere la stessa dimensione

~~Applicazionidiscalo~~

Lavoreremo con le matrici e assoceremo matrici ad un'applicazione lineare $L: V \to W$: V e W SPAZI VETTORIALI SU UN CAMPO K;

Siano $\dim V = n$ $\dim W = p$ $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B_W = \{w_1, \dots, w_p\}$ basi degli spazi vettoriali

$\Rightarrow$ ad L si associa una matrice $A \in M_{p \times n}$ nel campo K su cui sono definiti gli spazi vettoriali, così fatta:

Considero $L(v_1)$ è un vettore di W $\Rightarrow L(v_1) = \sum_{j=1}^{p} a_{j1} w_j$ così

$L(v_2) = \sum_{j=1}^{p} a_{j2} w_j$, e così via, fino $L(v_n) = \sum_{j=1}^{p} a_{jn} w_j$ allora la matrice ASSOCIATA AD L È

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Esempio: prendiamo applicaz. lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

[- Verificare con la definizione la sua linearità] $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \\ -x-y \end{pmatrix}$

Costruiamo la matrice associata ad L nella base $B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$B_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

tale matrice è indicata in questo modo

(base codominio) $\to \beta_{\mathbb{R}^3}$

$[L]^{\beta_{\mathbb{R}^3}}_{\beta_{\mathbb{R}^2}} =$

(base dominio) $\to \beta_{\mathbb{R}^2}$

① prendo le immagini dei vettori di base e ne cerco l'immagine

- indicare che $[L] \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

I colonna $\underbrace{L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{①} = \underbrace{\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{②}$

II colonna $L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ ⊛

② li scrivo come COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DI base del ~~base~~ codominio

$\Rightarrow$ so che la matrice associata sarà la matrice che ha per colonne

⊛ $\Rightarrow [L]^{\beta_{\mathbb{R}^3}}_{\beta_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}$

③ prendo la matrice dei coefficenti di entrambi i sistemi

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\xrightarrow{R_2-2R_3}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -6 & -4 \end{array}\right) \underset{-R_3}{\overset{\substack{R_3+R_2 \to R_2 \\ R_3+R_1 \to R_1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \sim$$

Nota: i due sistemi hanno soluzione: il rango della matrice DEI COEFFICIENTI è 3 e della matrice completa è sempre 3

$\Rightarrow$ e per Rouché-Capelli ha una soluzione unica!

$$\underset{\sim}{\frac{R_2}{-2} \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) = [L]^{\beta_{\mathbb{R}^3}}_{\beta_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$(\alpha)$ $(\beta)$

$$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \\ -x-y \end{pmatrix} \Rightarrow [L]^{B\mathbb{R}^3}_{B\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \leftarrow$$

COORDIN. IMMAGINE VETTORI BASE NEL CODOMINIO

1) Sapevo che era <u>lineare</u> e gli ho associato la matrice e fissando le basi costruisco la matrice

2) Io so che non è biettiva e non è isomorfismo perché dovrebbero avere la stessa dimensione GLI SPAZI VETT.

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \left[L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{B\mathbb{R}^3} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \left[L\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{B\mathbb{R}^3}$$

$$Im(L) = \ll L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \gg : \left( v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \Rightarrow L(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i L(v_i) \right)$$

$\Rightarrow L(v_i)$ sono vettori GENERATORI e se sono LIN. INDIP. sono <u>la base</u> di $Im L$

Poiché $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ e $L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ sono lin. indip. $\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $Im L$

$\Rightarrow \dim Im L = 2$ : $Im L$ È UN PIANO. e per trovare tale piano dobbiamo trovare eq. cartesiana e eq. param.

Quindi il rango della matrice $[L]^{B_{\mathbb{R}^3}}_{B_{\mathbb{R}^2}} = \dim Im L$.

poi CERCO il nucleo e con il teorema delle dimensioni posso scoprire la dimensione del nucleo $\dim V = \dim Ker L + \dim Im$

In questo caso $\dim V = 2$ $\quad \dim Im L = 2 \Rightarrow \dim Ker L = 0 \Rightarrow$ POICHÉ c'è solo il vettore nullo, L è iniettiva. (suriettiva no, PERCHÉ $\dim Im L = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$)

QUINDI: la matrice dell'applicazione mi dice tutto di L!

CAMBIO LE BASI DEL DOMINIO E/O DEL CODOMINIO: COME CAMBIA LA MATRICE?

In $\mathbb{R}^2$ prendo $e_{\mathbb{R}^2}$ e in $\mathbb{R}^3$ prendo $e_{\mathbb{R}^3}$ $\Rightarrow$ costruisco $[L]^{e_3}_{e_2} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{le operaz.}]{\text{se faccio}} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Variabili — matrici — E RISOLVO IL SISTEMA — COEFFICIENTI della COMB. LINEARE

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow [L]^{C_{\mathbb{R}^3}}_{C_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

IL NUCLEO È SEMPRE COSTITUITO DAL SOLO VETTORE NULLO PERCHÉ L È SEMPRE INIETTIVA

rg = 2 perché l'appl. lin. non è cambiata e QUINDI dim Im L DEVE SEMPRE ESSERE 2!

<u>Se negli spazi abbiamo le basi canoniche</u> scriviamo le matrice associate direttamente mettendo in riga i coefficenti DEI POLINOMI CHE RAPPRESENTANO LE COORDINATE DEL VETTORE IMMAGINE.

Quante matrici posso associare ad una APPL. LINEARE?

Cambiando le basi possiamo trovare matrici diverse

Sono infinite! Hanno in comune:

- stanno nello stesso insieme (nell'esempio $M_{3\times 2}$) DI MATRICI $p \times n$, CON $p$ = dim Codominio e $n$ = dim dominio di L.
- hanno lo stesso rango.

---

VEDIAMO ORA COME ASSOCIARE UN'APPLICAZIONE LINEARE AD UNA MATRICE

* Do la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 4}$

4 COLONNE: $\mathbb{R}^4$ DOMINIO
3 RIGHE: $\mathbb{R}^3$ CODOMINIO

** posso associarvi un'applicazione lineare <u>fissando le basi</u>.

Le colonne devono essere le immagini del vettore della base perciò $\mathbb{R}^4$ è il dominio dell'applicazione e il codominio è $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3}$$

PIÙ PRECISAMENTE:

→ deve avere nel codominio uno spazio ISOMORFO AD $\mathbb{R}^3$

→ " " " dominio " " " $\mathbb{R}^2$

fisso le basi: prendo quelle canoniche, SE NON RICHIESTO DIVERSAMENTE

$\Rightarrow$ so che $L\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$, $L\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $L\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$, $L\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Downarrow$$

$$L: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3+4x_4\\4x_1-x_3\\2x_1\end{pmatrix}$$

ho cercato il vettore generico che è comb. lin. dei vettori di base di cui avevo tutte le immagini

$$L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = L\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=$$

$$= x_1L\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)+x_2L\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)+x_3L\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)+x_mL\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=$$

$$= x_1\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3+x_4\\4x_1-x_3\\2x_1\end{pmatrix}=$$

ora moltiplichiamo la matrice per il vettore generico del DOMINIO $\Rightarrow$ IL VETTORE IMMAGINE

$$[L(v)]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}}=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\4&0&-1&0\\2&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

il legame tra la matrice data e l'applicazione

IN GENERALE:



Pertanto data $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ lineare

con matrice associata nelle basi $B_{\mathbb{R}^n}$ e $B_{\mathbb{R}^p}$

$$[L]^{B_{\mathbb{R}^p}}_{B_{\mathbb{R}^n}}$$

allora

$$\Longrightarrow \boxed{[L(v)]_{B_{\mathbb{R}^p}} = [L]^{B_{\mathbb{R}^p}}_{B_{\mathbb{R}^n}} \cdot [v]_{B_{\mathbb{R}^n}}}$$ VALE SEMPRE!

Data una matrice, fissate le basi, posso SEMPRE dare un'APPL. LIN. ASSOCIATA AD UNA MATRICE

VICEVERSA ~~invece~~ l'applicazione lineare è data mediante le forme cartesiane, soltanto se le basi del dominio e del codominio sono CANONICHE.

MATRICE $\longrightarrow$ APPLICAZIONE CON VETTORE IMMAGINE DATO CON POLINOMI NELLE COORDINATE DEL DOMINIO È DATA SOLO CON LE BASI CANONICHE NEGLI SPAZI!

APPLICAZIONE $\longrightarrow$ MATRICE $\longrightarrow$ con BASI QUALUNQUE!

Esercizio: possiamo costruire l'applicazione fissate le basi (nel codominio e nel dominio)

$$\varphi : Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \longrightarrow M_{p \times n}(\mathbb{R})$$
$$L \longmapsto [L]^{B_{\mathbb{R}^p}}_{B_{\mathbb{R}^n}}$$

ho costruito l'appl. L a partire da una matrice A nell'insieme delle matrici reali $A \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ dimostrare che $\varphi$ è ISOMORFISMO non canonico (xché dipende dalle basi fissate)

dimostrare $\begin{cases} \text{che è } \underline{\text{biettiva}} \text{ fissate le basi} \\ \text{che è } \underline{\text{lineare}} \end{cases}$

perciò LO SPAZIO DELLE APPLICAZIONI LINEARI ($L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$) SI IDENTIFICA CON LO SPAZIO DELLE MATRICI $M_{p \times n}(\mathbb{R})$, FISSATE LE BASI NEGLI SPAZI VETTORIALI