CAMBIAMENTO DI BASE

Data come base $B_1=\{v_1,\dots,v_n\}$ in uno spazio V, n-dim. si cercano le coordinate dei vettori in una nuova base $B_2=\{w_1,\dots,w_n\}$. Dato $v\in V$, di coordinate nella base B_1, $[v]_{B_1}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ cerco $[v]_{B_2}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Imposto il sistema $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=y_1[w_1]_{B_1}+y_2[w_2]_{B_1}+\dots+y_n[w_n]_{B_1}$ $\Rightarrow$ FORMIAMO LA MATRICE METTENDO i $[w_i]_{B_1}$ IN COLONNA $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}[w_1]_{B_1} & [w_2]_{B_1} & \cdots & [w_n]_{B_1}\\ | & | & & |\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$A\,[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$$

(la matrice A ha RANGO MAX perché gli elementi delle colonne sono lin. indip.)

La matrice A è una matrice quadrata: $A_{n\times n}$ ed è invertibile. $\Rightarrow$ MOLTIPLICO ENTRAMBI I MEMBRI PER A^{-1}

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\,[v]_{B_2}=A^{-1}[v]_{B_1} \Rightarrow [v]_{B_2}=A^{-1}[v]_{B_1}$$

A^{-1} è la matrice del cambiamento di base dalla base B_1 alla base B_2 $\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}[v_1]_{B_2} & [v_2]_{B_2} & \cdots & [v_n]_{B_2}\\ | & | & & |\end{pmatrix}$

esercizio

In $\mathbb{R}^2$ con la base canonica $\mathcal{E}=\{e_1,e_2\}$. Considero i vettori $v_1=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=[v_1]_e$ e $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=[v_2]_e$

$\Rightarrow B=\{v_1,v_2\}$ è base di $\mathbb{R}^2$

Sia $v=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=[v]_e$ $\Rightarrow$ cerco $[v]_B$. DEVO TROVARE LA MATRICE A^{-1} =

$A^{-1}=\begin{pmatrix}[e_1]_B & [e_2]_B\\ | & |\end{pmatrix}$. CERCO $[e_1]_B=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=y_1\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ E CERCO $[e_2]_B$: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=y_1\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ O RISOLVO DIRETTAMENTE I SISTEMI O CERCO A^{-1}, DATA LA MATRICE

$A=\begin{pmatrix}[v_1]_e & [v_2]_e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-2 & 1 & 1 & 0\\3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\sim[3R_1+2R_2\to R_2]:\left(\begin{array}{cc|cc}-2 & 1 & 1 & 0\\0 & 5 & 3 & 2\end{array}\right)\sim[5R_1-R_2\to R_1]:\left(\begin{array}{cc|cc}-10 & 0 & 2 & -2\\0 & 5 & 3 & 2\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1/5 & +1/5\\0 & 1 & 3/5 & 2/5\end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{7}{5}\end{pmatrix}=[v]_B$$

(la matrice $\begin{pmatrix}-1/5 & 1/5\\3/5 & 2/5\end{pmatrix}$ $= A^{-1}$)

TEOREMA DELLA BASE INCOMPLETA

Sia V spazio vettoriale n-dimensionale e $v_1, \dots, v_k$ i vettori di V lin. indip. con $k < n$ $\Rightarrow \exists$ $n-k$ vettori lin. indip. di V tali che $B = \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$ sia base di V

dimostrazione

considero $W = \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$ $\Rightarrow \exists$ almeno un vettore lin. indip. con i vettori $v_1, \dots, v_k$ poiché $k < n$ $\Rightarrow$ sia w_1 tale vettore $\Rightarrow w_1 \notin W \Rightarrow W \subsetneq V \Rightarrow$ considero $W_1 = \langle\langle v_1, \dots, v_k, w_1 \rangle\rangle$ se $k+1 = n \Rightarrow W \equiv V \Rightarrow$ quindi $\{v_1, \dots, v_n, w_1\}$ è la base cercata. Se $k+1 < n$ ripeto il ragionamento fatto sopra: $\exists\, w_2 \notin W_1$ e quindi lin. indip. con gli altri vettori $\Rightarrow$ considero $\{v_1, \dots, v_n, w_1, w_2\}$ $\Rightarrow$ se $k+2 = n$ abbiamo una base di V e quindi abbiamo dimostrato il teorema. Se $k+2 < n$ ripetiamo il ragionamento. Esso termina quando abbiamo trovato gli $n-k$ vettori cercati.

c.v.d.

proposizione

In uno spazio vettoriale V, n-dimensionale, k vettori, $k \leq n$, sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ (se e solo se) costruita una matrice avente per righe le coordinate dei vettori dati in una base B, $A \in M_{k \times n}$, i minori di ordine k sono tutti nulli

dimostrazione

(se $k > n$ i vettori sono sempre lin. dip. POICHÉ LO SPAZIO V HA DIMENSIONE n)

"$\Rightarrow$" nella matrice A
$$\begin{pmatrix} [v_1]_B & \text{—} \\ [v_2]_B & \text{—} \\ \vdots & \\ [v_k]_B & \text{—} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_k \end{pmatrix}$$
supponiamo $v_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{k} \alpha_i v_i$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \rightarrow j \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1, i \neq j}^{k} \alpha_i R_i \\ R_{j+1} \\ R_k \end{pmatrix}$$

Ogni sottomatrice di ordine k ha una riga combinazione lineare delle rimanenti $\Rightarrow$ il determinante è nullo $\forall$ SOTTOMATRICE $k \times k$ DI A.

"$\Leftarrow$" si dimostra facendo analogo ragionamento all'indietro

c.v.d.

proposizione

Data una matrice $A \in M_{p \times n}$, il rango di A coincide con il numero massimo di vettori riga linearmente indipendenti (conseguenza della prop. precedente)

osservazione: Il # massimo di vettori riga lin. indip. è detto RANGO RIGA della matrice. il # massimo di vettori colonna lin. indip. è detto RANGO COLONNA oppure RANGO PER COLONNA della matrice

Si dimostra che il rango di A coincide con il suo rango colonna esattamente come per il rango riga.

Pertanto rango riga di A = rango colonna di A = rg A   [III DEFINIZIONE DI RG]

esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & -1 \\ 2 & \boxed{4} & 1 \\ 3 & \boxed{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad rg = 2$$

$c^1 \quad c^2 \quad c^3$

multiplo della 1° colonna: due sole colonne sono linearmente indipendenti

$c^2 = 2c^1 + 0c^3$ (c^2 espressa con combinazione lineare)

$xR_1 + yR_2 + zR_3 = 0$

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ -x+y+2z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - z = 0 \\ 3y - 5z = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = z/3 \\ y = -\frac{5}{3}z \end{cases}$$

$z = 3,\ x = 1,\ y = -5$

$R_1 - 5R_2 + 3R_3 = 0 \Rightarrow R_1 = 5R_2 - 3R_3$