- Sia $A \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ : A può essere la matrice associata ad un sistema omogeneo $\Sigma_0 : Ax = 0$ $\Rightarrow$ lo spazio Sol $\Sigma_0$ : è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, la sua dimensione è $n - rg\,A$, una sua base è costituita dalle soluzioni fondamentali del sistema

Se $A' \sim A \Rightarrow$ Sol $\Sigma_0' =$ Sol $\Sigma_0$ , dove $\Sigma_0'$ è il sistema $A'x = 0$

- Sia $A \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ : considero lo spazio generato dai vettori riga di A : $R(A)$ = spazio riga

$R(A) = \langle\langle R_1(A), R_2(A), \dots, R_p(A) \rangle\rangle$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ con dimensione $rg\,A$. Una sua base è data dai vettori linearmente indipendenti tra gli $R_j(A)$

$R(A')$ e $R(A)$ hanno qualche RELAZIONE? : se $A' \sim A \Rightarrow R(A') = R(A)$
POICHE' LE RIGHE DI A' SONO COMBINAZIONI LINEARI DELLE RIGHE DI A.

Sia $A \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ : considero lo spazio generato dai vettori colonna di A

$C(A)$ = spazio colonna $= \langle\langle C^1(A), C^2(A), \dots, C^n(A) \rangle\rangle$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^p$ la cui dimensione è il $rg\,A$

Una sua base è data dalle colonne di A linearmente indipendenti

Se $A' \sim A$, $C(A') = C(A)$? COMINCIAMO A VERIFICARE LA POSSIBILE UGUAGLIANZA CON UN ESEMPIO:

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$C(A) = \ll \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \gg \prec \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim C(A) = 2,$$

è un piano in $\mathbb{R}^3$ passante per 0; LA SUA EQUAZIONE SI OTTIENE RICORDANDO CHE UN VETTORE QUALUNQUE DI $C(A)$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ E' COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DI BASE $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x = s \\ y = 2s + t \\ z = 3s - t \end{cases}}_{\text{parametrica}} \leftarrow \boxed{\text{EQUAZIONE PARAMETRICA}}$$

$$\begin{cases} x = s \\ t = y - 2x \\ \boxed{z = 3x - y + 2x} \end{cases}$$

$\leftarrow$ RICAVIAMO I PARAMETRI E OTTENIAMO SOSTITUENDOLI $\leftarrow$ L'EQUAZIONE CARTESIANA

UN ALTRO MODO PER OTTENERE L'EQUAZIONE È IMPORRE AL VETTORE COLONNA $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ DI ESSERE LINEARMENTE DIPENDENTE CON I VETTORI DELLA BASE E QUINDI IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DATA È NULLO

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & -1 & z \end{pmatrix} = \underline{z + y - 5x = 0}$$

$\uparrow$ EQUAZIONE DEL PIANO DI $\mathbb{R}^3$.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}} \sim \underset{A'}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ POICHE' $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ HA DETERMINANTE $\neq 0$ $\Rightarrow$ IL VETTORE $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ NON APPARTIENE ALLO SPAZIO GENERATO DAI VETTORI DI $A'$, PERCIÒ:

$$C(A) \neq C(A').$$

2

**Proposizione:** Siano $A, A' \in M_{p \times m}(\mathbb{R})$ e $A' \sim A$ $\Rightarrow$ se $C^i(A')$ e $C^j(A')$ sono linearmente indipendenti

$\Rightarrow$ $C^i(A)$ e $C^j(A)$ sono linearmente indipendenti.

**Dimostrazione:** SIA $\alpha_i C^i(A) + \alpha_j C^j(A) = 0$ $\Rightarrow$ POSSIAMO SCRIVERE USANDO TUTTE LE COLONNE DI $A$: $0\,C^1(A) + 0\,C^2(A) + \dots + \alpha_i C^i(A) + 0\,C^{i+1}(A) + \alpha_j C^j(A) + 0\,C^m(A) = 0$

O EQUIVALENTEMENTE

$$\Rightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ 0 \end{pmatrix} \in Sol\,\Sigma_0 \text{ dove } \Sigma_0 \text{ è } AX = 0$$

Se considero $\Sigma_0'$ come $A'X = 0$ $\Rightarrow$ $Sol\,\Sigma_0' = Sol\,\Sigma_0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_i \\ 0 \\ \alpha_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in Sol\,\Sigma_0' \Rightarrow A' \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $0\,C^1(A') + 0\,C^2(A') + \dots \alpha_i C^i(A') + \dots + 0\,C^{j-1}(A') + \alpha_j C^j(A') + 0\,C^{j+1}(A') +$

$+ 0\,C^m(A') = 0$

$\alpha_i C^i(A') + \alpha_j C^j(A') = 0$ $\Rightarrow$ poichè $C^i(A')$ e $C^j(A')$ sono

linearmente indipendenti $\Rightarrow$ $\alpha_i = \alpha_j = 0$ $\Rightarrow$ $C^i(A)$ e $C^j(A)$

sono linearmente indipendenti

CVD

<u>Proposizione</u>: se $A \sim A'$, $A, A' \in M_{p\times m}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ se $C^j(A') = \sum_{i=1, i\neq j}^{m} \alpha_i C^i(A')$

$$\Rightarrow C^j(A) = \sum_{i=1, i\neq j}^{m} \alpha_i C^i(A)$$

c.v.d

<u>Esempio</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^3(A') = 1C^1(A') + 2C^2(A')$$

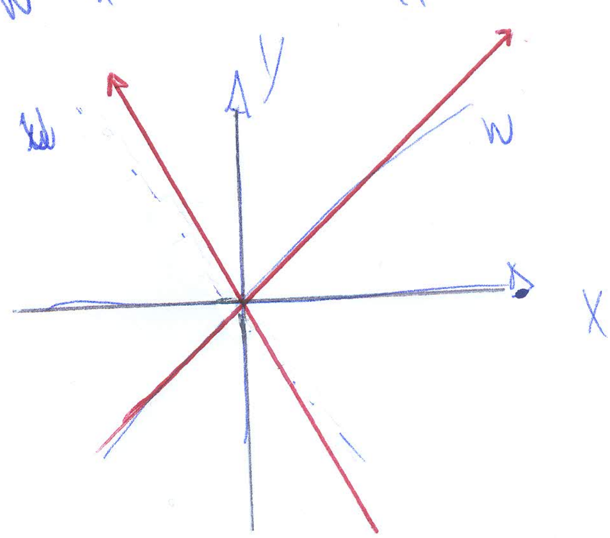
$C^3(A) = 1C^1(A) + 2C^2(A)$ : I COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE DELLE COLONNE DI A SONO GLI STESSI DELLE COLONNE DI A'

---

Sia V spazio vettoriale n dimensionale, siano U e W sottospazi di V; supponiamo che la dim $U = p$ e dim $W = q$, con $p \leq n$ e $q \leq n$.

Se considero 1) $U \cap W$ è sottospazio vettoriale di V?
" " 2) $U \cup W$ " " " " ?

ESEMPIO

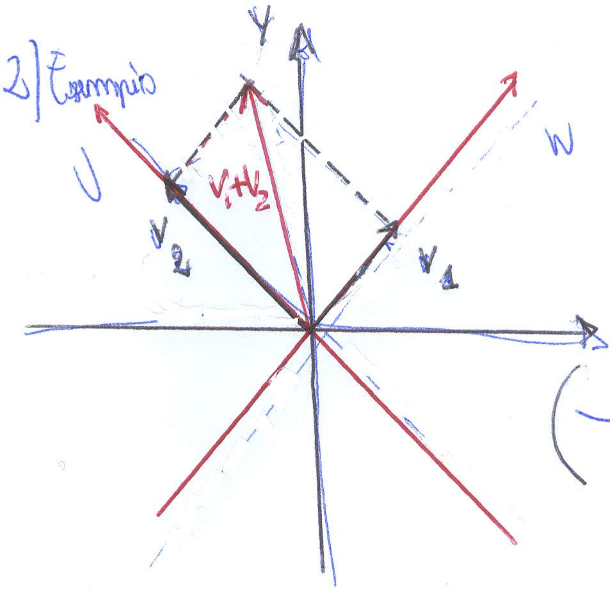


1| verifichiamo la definizione: I| $0 \in U \cap W$?

(FARE PER CASA)

II| Se $v_1, v_2 \in U \cap W \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in U \cap W$ $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2| Esempio




$v_1 + v_2 \notin U \cup W \Rightarrow U \cup W$ non è sottospazio vettoriale

$\left( \rightarrow \boxed{U \oplus W = \mathbb{R}^2} \right)$

<u>Definizione</u>: il più piccolo sottospazio di V che contiene $U \cup W$ è detto spazio SOMMA: $U + W$

Se $U \cap W = \{0\} \Rightarrow$ lo spazio somma è detto SOMMA DIRETTA di U e W e si indica $U \oplus W$

NELL'ESEMPIO 2) $U + W = \mathbb{R}^2$ E LA SOMMA È DIRETTA