15 - 04 - 19

<u>Definizione</u>: si chiama spazio <u>EUCLIDEO</u> uno spazio vettoriale reale dotato di una forma bilineare simmetrica definito positiva; tale forma bilineare è detta <u>PRODOTTO SCALARE</u>

<u>Esempi</u>: 1) In $\mathbb{R}^2$ considero la forma $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $F((X,Y)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

F è bilineare perchè espressa da un polinomio omogeneo di 2° grado nelle coordinate dei due vettori; è simmetrica $F((x,y)) = F((y,x)) \quad \forall\, X \text{ e } Y \in \mathbb{R}^2$?

$\Rightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2$ → Verificata, perchè il prodotto in $\mathbb{R}$ gode della proprietà commutativa.

Per verificare la simmetria si può anche costruire una della matrice associate:

$$[F]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → È simmetrica.

È definita positiva?

Metodo di Jacobi: verifichiamo che i minori di N-O siano positivi

$$[F]_C = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → Entrambi i determinanti valgono 1, quindi F è definita positiva.

Oppure calcoliamo $F((x,x)) = x_1^2 + x_2^2 > 0 \quad \forall\, x \neq 0$

Questo è il <u>prodotto</u> <u>scalare</u> <u>standard</u> o usuale in $\mathbb{R}^2$.

2) Sia $V = \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua} \}$; ~~considero la forma~~

($V = \mathcal{C}^0_{[a,b]}$ indica l'insieme di funzioni continue nell'intervallo $[a,b]$); considero la forma $F: \mathcal{C}^0_{[a,b]} \times \mathcal{C}^0_{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f,g) \longmapsto \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

È forma bilineare?

$$F((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g)) = \alpha_1 F((f_1, g)) + \alpha_2 F((f_2, g))$$

$$F((f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2)) = \beta_1 F((f, g_1)) + \beta_2 F((f, g_2))$$

DA VERIFICARE

Verifico:

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b \alpha_1 f_1(x)\, g(x)\, dx + \int_a^b \alpha_2 f_2(x)\, g(x)\, dx$$

Portando fuori α_1 e α_2 nel secondo membro si verifica la prima condizione di linearità.

È simmetrica?

$$F((f, g)) = F((g, f))$$

Il prodotto di funzioni, per come è definito, gode della proprietà commutativa, quindi è simmetrica.

È definita positiva?

$$F((g, g)) = \int_a^b g(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b (g(x))^2\, dx$$

Quindi è definita positiva e si è dimostrato come la forma F sia un prodotto scalare. Quindi lo spazio V è diventato uno <u>SPAZIO EUCLIDEO</u>.

lo spazio euclideo ci permette di <u>MISURARE</u> "oggetti" come segmenti e angoli, di conseguenza ci dà anche la nozione di perpendicolarità

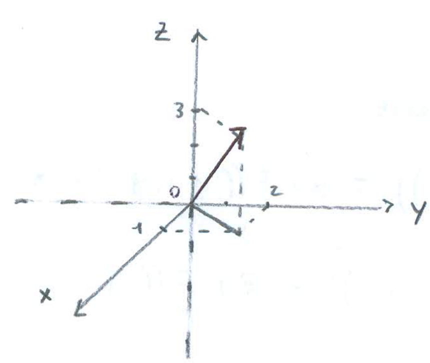
Sia V uno spazio euclideo reale n-dimensionale e sia $F: V \times V \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare su V $\Rightarrow$ sia $Q: V \to \mathbb{R}$ la sua forma quadratica associata ($t.c.\ Q(v) = F((v, v))$)

$\Rightarrow Q(v)\ \forall v \neq 0$ è positiva $\Rightarrow \exists, \forall v \in V, \sqrt{Q(v)} \Rightarrow$ definisco NORMA di v

$$\| v \| = \sqrt{Q(v)}$$

Indichiamo $v \cdot w$ il prodotto scalare standard tra i vettori v e w.

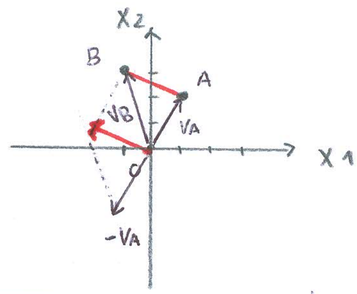
In $\mathbb{R}^3$ considero $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \| v \| = \sqrt{Q\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \sqrt{14}$



$\Rightarrow$ Se $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

IL PRODOTTO SCALARE STANDARD SI INDICA CON "$\cdot$" o "$\langle , \rangle$", CIOÈ $v \cdot w$ o $\langle v, w \rangle$

In $\mathbb{R}^2$ euclideo, $((\mathbb{R}^2, \cdot)$ o $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle))$ voglio la distanza tra i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = B$



Ottengo un vettore con la stessa lunghezza del segmento che voglio misurare se sommo $V_B + (-V_A)$.

$\|V_B - V_A\| = \sqrt{(V_B - V_A) \cdot (V_B - V_A)} \Rightarrow d(A, B) = \|V_A - V_B\| = \sqrt{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{5}$

$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

ESEMPIO DI SPAZIO NON EUCLIDEO:

In $\mathbb{R}^4$ considero la forma quadratica: $Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c x_4^2$ con $c > 0$

la segnatura è $(3, 1)$. Poiché non è definita positiva, lo spazio in $\mathbb{R}^4$ con tale f.q non è EUCLIDEO; questa particolare f.q è detta di MINKOWSKI e definisce lo spazio della RELATIVITÀ RISTRETTA.

$\exists$ vettori $v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$, per i quali $Q(v) > 0$ $\rightarrow$ vettori spazio

$\exists$ vettori $v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$, per i quali $Q(v) < 0$ $\rightarrow$ vettori tempo

$\exists$ vettori $v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$, per i quali $Q(v) = 0$ $\rightarrow$ vettori LUCE

la costante c è la velocità della luce.

Proposizione: Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

In uno spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, \cdot)$

Dimostrazione: Supponiamo x ed y siano linearmente dipendenti $\Rightarrow$

$y = \alpha x$ con $\alpha \neq 0$

$\Rightarrow |x \cdot y| = |x \cdot \alpha x| = |\alpha (x \cdot x)| = |\alpha| \, |x \cdot x| = |\alpha| \, \|x\|^2$

$\|x\| \, \|y\| = \|x\| \|\alpha x\| = |\alpha| (\sqrt{x \cdot x})^2 = |\alpha| \|x\|^2$: VALE L'UGUAGLIANZA

Supponiamo siano linearmente indipendenti $\Rightarrow$ considero

$\langle\langle x, y \rangle\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$

Considero $\left[\cdot \Big|_{\langle\langle x, y \rangle\rangle} \right] = \begin{pmatrix} x \cdot x & x \cdot y \\ y \cdot x & y \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\|x\|^2}{x \cdot x} & x \cdot y \\ x \cdot y & \underset{\|y\|^2}{y \cdot \cancel{y}\,y} \end{pmatrix} \Rightarrow$

poichè "$\cdot$" è definito positivo e $x \cdot x > 0$

$\Rightarrow$ per il teorema di Jacobi, anche il minore $\|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2 > 0$

$(\|x\| \, \|y\|)^2 > (x \cdot y)^2 \Rightarrow \|x\| \, \|y\| > |x \cdot y|$

c.v.d.