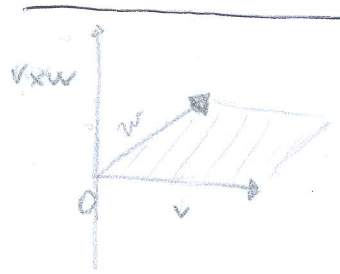
15/05/2019

PRODOTTO VETTORIALE



$v \times w$ = un vettore ; se $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$; $v \times w = (v_y w_z - w_y v_z) i - (v_x w_z - w_x v_z) j + (v_x w_y - w_x v_y) k$

SONO LE COORDINATE DI UN VETTORE PERPENDICOLARE AL PIANO DI v E w

PRODOTTO MISTO

Il prodotto misto tra u, v, w è lo scalare $u \cdot (v \times w)$

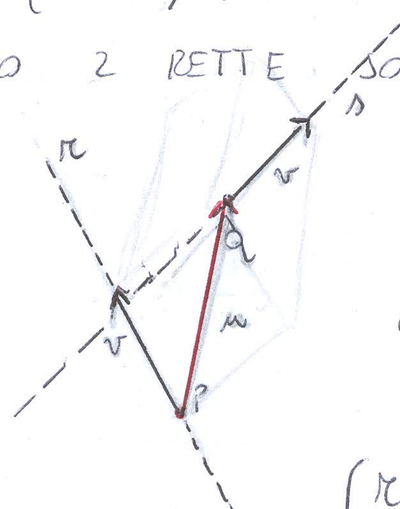
siano $u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_x \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$

$u \cdot (v \times w) = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \Rightarrow$ COME DIMOSTRATO PRECEDENTEMENTE

$|u \cdot (v \times w)|$ = volume del parallelepipedo AVENTE PER LATI i tre vettori u, v, w

$\Rightarrow u \cdot (v \times w) \neq 0 \Leftrightarrow u, v, w$ sono lin. indip.

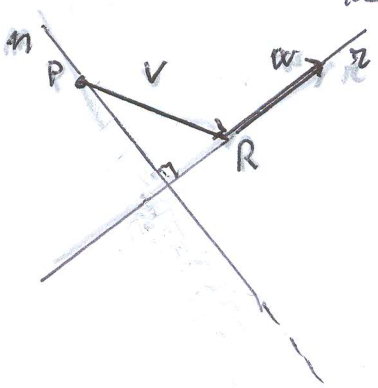
QUANDO 2 RETTE SONO SGHEMBE?



u, v, w sono complanari se il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori è nullo

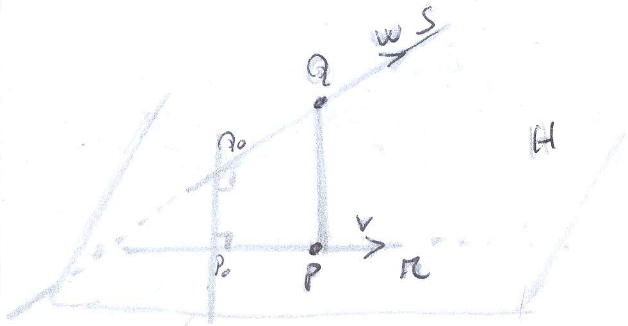
riassumendo
$$\begin{cases} r \text{ ed } s \text{ sono sghembe} \Leftrightarrow u \cdot (v \times w) \neq 0 \\ r \parallel s \Leftrightarrow v \times w = 0 \\ r \cap s = \text{un punto } R \Leftrightarrow v \times w \neq 0 \text{ ma } u(v \times w) = 0 \end{cases}$$

DISTANZA PUNTO - RETTA



$$d(P, r) = \left\| v - \frac{v \cdot w}{\|w\|^2} w \right\|$$

DISTANZA MINIMA TRA RETTE SGHEMBE



$v \times w = n$ è non nullo e $\perp$ a v e a w
$\Rightarrow$ n, v, w sono lin. indip.

H piano per r, $\perp$ ad n
$\Rightarrow$ s non è $/\!/$ ad H perché w non è combinazione lineare di n e ~~non~~ di v e quindi s interseca H in Q_0
la retta per Q_0 $\perp$ a r nel piano H ha la direzione di n $\Rightarrow$ $d(r,s) = d(P_0, Q_0)$

Presi arbitrariamente P su r e Q su s $\Rightarrow$ $\overline{P_0Q_0}$ è la proiezione ortogonale di $\overline{PQ}$ su n:
infatti dati u_1, u_2 $\Rightarrow$ la proiezione di u_1 su u_2 è data da $\dfrac{u_1 \cdot u_2}{\|u_2\|^2} u_2$

$$\overline{PQ} = \overline{PP_0} + \overline{P_0Q_0} + \overline{Q_0Q} \quad ; \quad \text{Cerco } \frac{\overline{PQ} \cdot n}{\|n\|^2} n$$

$$\frac{(\overline{PP_0} + \overline{P_0Q_0} + \overline{Q_0Q}) \cdot n}{\|n\|^2} n = \frac{\overline{PP_0} \cdot n + \overline{P_0Q_0} \cdot n + \overline{Q_0Q} \cdot n}{\|n\|^2} n$$

$$\overline{PP_0} \cdot n = 0 \quad ; \quad \overline{Q_0Q} \cdot n = 0$$

$$\frac{\overline{P_0Q_0} \cdot n}{\|n\|^2} n = \frac{\overline{PQ} \cdot n}{\|n\|^2} n \quad ; \quad d(r,s) = \| \overline{P_0Q_0} \| = \frac{|\overline{PQ} \cdot n|}{\|n\|}$$

$$d(r,s) = \frac{|\overline{PQ} \cdot (v \times w)|}{\| v \times w \|}$$