16/10/2018

Determinante → calcolabile solo per matrici quadrate
(regola di Laplace)

Sia $A \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{i,j=1\dots m}$ $\Rightarrow \operatorname{Det} A = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A_{\hat{ij}}|$
(indice di riga fisso)

Dimostrabile che vale LO STESSO NUMERO anche con colonna fissata;

$$\operatorname{Det} A = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A_{\hat{ij}}|$$
(indice di colonna fisso)

Il determinante calcolato nei due modi assume lo stesso valore.

→ Si considera la riga o la colonna con più zeri (semplifica conti).

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4\times4} \Rightarrow |A| \underset{\boxed{i=2}}{=} \sum_{j=1}^{4} (-1)^{2+j} a_{2j} \, |A_{\hat{2j}}| =$$

$$= (-1)^{2+1} a_{21} |A_{\hat{21}}| + (-1)^{2+2} a_{22} |A_{\hat{22}}| + (-1)^{2+3} a_{23} |A_{\hat{23}}| + (-1)^{2+4} a_{24} |A_{\hat{24}}| =$$

Necessario passare a determinanti più piccoli fino a quelli di sottomatrici 2x2.

$$= -(-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{sottomatrice}} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{+(-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-1)\cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{sviluppo del primo addendo precedente}} \quad \dots$$

$$= +1 - 10 - 2(1 - 2(8)) + (-7) =$$

$$\operatorname{Det} A = 1 - 10 + 30 - 7 = 14$$

Il Metodo di Sarrus applicabile solo alle matrici 3X3.

SOTTOMATRICE : si dice sottomatrice di una matrice $A \in M_{p \times n}$ la matrice che ottengo togliendo da A un certo numero di righe e/o colonne.

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}_{3 \times 4} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ é sottomatrice di } A$$

controesempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ non é sottomatrice di } A$$

Possibile creare matrici quadrate; nel caso di A si ottengono quattro 3X3, e diciotto 2X2, dodici 1X1.

DEFINIZIONE : 1) I determinanti delle sottomatrici quadrate di una matrice A si dicono MINORI di A.

2) L'ordine di un minore é l'ordine stesso della sottomatrice di cui é determinante.

3) Si dice RANGO di una matrice $A \in M_{p \times n}$, l'ordine massimo dei minori non nulli.
→ Dovrebbe essere dimostrato che é uguale all'altra definizione, cioè coincide al numero dei pivot.
(Non l'abbiamo dimostrato)

esempio

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Il rango é almeno 1

[L'unica matrice che ha rango $\underline{\underline{0}}$ é quella $\underline{\underline{\text{nulla}}}$.]

A ha come massimo ordine dei minori, 4 ($A_{4\times4}$ é sottomatrice di se stessa)

$\rightarrow$ poiché $\det A = \underset{>0}{14} \Rightarrow$ rango $A = \text{rg}A = 4$

esempio (ESERCIZIO)

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & K & 0 & 2 \\ 0 & -1 & K & -2 \\ 2 & K & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad K \in \mathbb{R}$ $\quad$ discutere il rgA a seconda del valore del parametro K.

- Calcolo dei pivot: (metodo eliminazione di Gauss)

$$A \overset{2R_1 - R_3 \to R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & K & 0 & 2 \\ 0 & -1 & K & -2 \\ 0 & K & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\boxed{K\neq 0}}{\overset{KR_2 + R_3 \to R_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & K & 0 & 2 \\ 0 & -1 & K & -2 \\ 0 & 0 & K^2-1 & -2K+3 \end{pmatrix}$$

$K \neq 0$ altrimenti non potrebbe essere utilizzato il metodo. (parametro di moltiplicazione non deve essere nullo)

$\downarrow$

2 pivot non nulli: $\rightarrow$ necessaria discussione del parametro K.

$K^2 - 1 = 0 \Rightarrow K = \pm 1$

- Se $K = \pm 1 \Rightarrow \text{rg}A = 3$ (perché presente $-2K+3 \neq 0$)
- Se $K \neq \pm 1$ e $K \neq 0$ $\Rightarrow \text{rg}A = 3$

Discussione necessaria anche per $K=0$ nella matrice precedente all'imposizione $K\neq 0$

- Se $K=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}A' = \text{rg}A = 3$

[Matrici equivalenti hanno lo stesso rango.]

- Calcolo con i <u>minori</u>

La sottomatrice quadrata più grande che si può ottenere da A è una matrice 3X3
è necessario calcolare il determinante di almeno una delle sottomatrici per determinare SE ESISTONO valori di K per cui non sia nullo.

$$\begin{vmatrix} K & 0 & 2 \\ -1 & K & -2 \\ K & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\boxed{i=1}}{=} K(K+2)+2(-1-K^2) = K^2+2K-2-2K^2 = -K^2+2K-2$$

Trovare dei valori di K che lo annullano; se presenti sostituirli nelle altre matrici quadrate 3X3; se non presenti il rango è 3.

$$-K^2+2K-2=0$$

$$K^2-2K+2=0$$

$K_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} \rightarrow \nexists\, K \in \mathbb{R}$ per cui il determinante si annulla

$$\Rightarrow rgA = 3 \quad \forall K \in \mathbb{R}$$