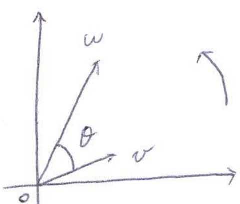
17/04/19

Teorema di C-S, $\forall v, w \in (V, \cdot) \Rightarrow |v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$

Se $v, w \neq 0 \Rightarrow \dfrac{|v \cdot w|}{\|v\| \|w\|} \leq 1 \to \left| \dfrac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} \right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \dfrac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|} \leq 1$ considero $\cos\theta$ si ha $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ per $\theta \in [0, \pi]$

(*) $\dfrac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} = \cos\theta \Rightarrow v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos\theta$



POSSIAMO ORA MISURARE GLI ANGOLI : SI CONSIDERANO v e w LATI $\Rightarrow$ misurazione dell'angolo θ attraverso prodotto scalare DEI VETTORI v e w : CON LA FORMULA (*) OTTENIAMO IL COSENO DI θ E QUINDI POSSIAMO VALUTARE θ.

Definizione: Due vettori v, w entrambi $\neq 0$ si dicono PERPENDICOLARI se l'angolo θ tra essi compreso è $\frac{\pi}{2}$ ~~[illegible]~~, ORIENTATO POSITIVAMENTE

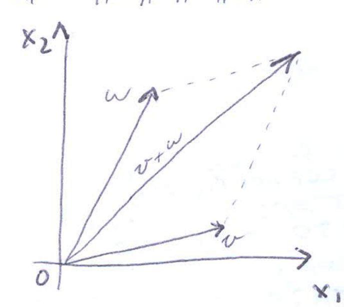
Ora possiamo misurare gli angoli e dare la nozione di perpendicolarità.

Dall'uguaglianza (*) si deduce che se $v \perp w \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \dfrac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow v \cdot w = 0 \Rightarrow v$ è ortogonale a w : $v \perp w \Leftrightarrow v \cdot w = 0$

Disuguaglianza triangolare: Dati $v, w \in (\mathbb{R}^n, \cdot)$, v e w non nulli $\Rightarrow \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

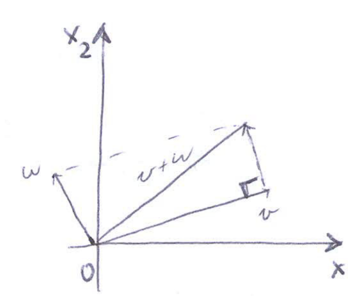
dimostraz. $\|v+w\|^2 = (v+w)\cdot(v+w) = v \cdot v + v \cdot w + w \cdot v + w \cdot w =$
$= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 v \cdot w \Rightarrow \underbrace{\|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\|}_{\text{disuguaglianza di Cauchy-Schwarz}} =$

$= (\|v\| + \|w\|)^2 \Rightarrow \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$



Teorema di Pitagora

Se $v \perp w \Rightarrow \underbrace{\|v+w\|^2}_{\text{quadrato sull'ipotenusa}} = \underbrace{\|v\|^2 + \|w\|^2}_{\text{quadrati sui lati}} + 2 v \cdot w$ ma $v \cdot w = 0$ perché sono ortogonali



In $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ ~~[illegible]~~ euclideo, se considero come forma bilineare un prodotto scalare $\Rightarrow$ il teorema di Sylvester asserisce che $\exists$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, $B_{\perp n}$, tale che $[\text{"}\cdot\text{"}]_{B_{\perp n}} = I$

In tale base $B_{\perp n}$ infatti, dati $v, w \in (\mathbb{R}^n, \cdot) \Rightarrow v \cdot w = X^T [\text{"}\cdot\text{"}]_{B_{\perp n}} Y$ con $[v]_{B_{\perp n}} = X$ e $[w]_{B_{\perp n}} = Y$ $\Rightarrow X^T [\text{"}\cdot\text{"}]_{B_{\perp n}} Y = X^T I Y = X^T Y$: È IL PRODOTTO SCALARE ESPRESSO TRAMITE LE COORDINATE IN UNA BASE ORTONORMALE

In $B_{\perp_n}$ di $\mathbb{R}^n$, $B_{\perp_n} = \{v_1, \dots, v_n\}$, considero $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \Rightarrow v \cdot v_k = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) \cdot v_k =$

$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (v_j \cdot v_k) = \alpha_k, \forall k = 1, \dots, n$, perché $v_j \cdot v_k = \begin{cases} 0 & \forall j \neq k \\ 1 & \forall j = k \end{cases}$; QUINDI LA K-ESIMA COORDINATA DI UN VETTORE V IN UNA BASE ORTONORMALE È DATA DAL PRODOTTO SCALARE DI V CON IL VETTORE V_k DELLA BASE

Ricordo che se $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è f. bilineare simmetrica $\Rightarrow$ preso $U < \mathbb{R}^n$ privo di elementi isotropi $\neq 0$

$\Rightarrow \exists U^\perp$ e $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$

Se F è un prodotto scalare $\Rightarrow \nexists$ vettori isotropi non nulli $\Rightarrow \forall U < \mathbb{R}^n \ \exists U^\perp$ e $\boxed{U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n}$

Essendo $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n \Rightarrow$ ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ può essere dato come $v = u + w$ dove $u \in U$ e $w \in U^\perp$ con u <u>proiezione ortogonale</u> di v su U

Vediamo come trovare la proiezione ortogonale di un vettore v di $\mathbb{R}^n$ su un sottospazio U dato
Supponiamo che $v = u + w$ con u proiezione ortogonale su U e $w \in U^\perp$.
Diciamo $B_U = \{u_1, \dots, u_k\} \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{k} x_j u_j + w \Rightarrow w = v - \sum_{j=1}^{k} x_j u_j$ w deve essere in un $U^\perp$

$\Rightarrow w \cdot u_i = 0 = v \cdot u_i - \sum_{j=1}^{k} x_j (u_j \cdot u_i) \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} x_j (u_j \cdot u_i) = v \cdot u_i \quad \forall i = 1, \dots, k$ $\Rightarrow$ se faccio w scalare un vettore di U E AVRÒ $= 0$

OTTENGO UN SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO:

$$\Rightarrow \Sigma: \begin{cases} x_1(u_1 \cdot u_1) + x_2(u_2 \cdot u_1) + \dots + x_k(u_k \cdot u_1) = v \cdot u_1 \\ \vdots \\ x_1(u_1 \cdot u_k) + x_2(u_2 \cdot u_k) + \dots + x_k(u_k \cdot u_k) = v \cdot u_k \end{cases}$$

sistema lineare non omogeneo in K incognite e K equazioni

Il sistema ha sempre soluzione perché il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della completa: la matrice DEI COEFFICIENTI è associata al prodotto scalare nella base scelta; ESSENDO IL PRODOTTO SCALARE DEFINITO POSITIVO $\Rightarrow$ per il teorema di Jacobi i minori DI N-O sono $> 0 \Rightarrow$ il determinante è $\neq 0 \Rightarrow$ rg massimo DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI E DELLA MATRICE COMPLETA E QUINDI I RANGHI COINCIDONO E QUINDI IL SISTEMA Σ HA SOLUZIONE CHE DÀ IL VETTORE DELLE COORDINATE DELLA PROIEZIONE ORTOGONALE DI V NELLA BASE DI U

In $B_\perp$ di $\mathbb{R}^n \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{v \cdot u_1}{\|u_1\|^2} \\ x_2 = \dfrac{v \cdot u_2}{\|u_2\|^2} \\ \vdots \\ x_k = \dfrac{v \cdot u_k}{\|u_k\|^2} \end{cases}$ $\rightarrow$ coefficienti di Fourier

Se $B_{\perp_n} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = v \cdot u_1 \\ \vdots \\ x_k = v \cdot u_k \end{cases}$

<u>Teorema di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt</u>

~~Dato~~ (Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$ a partire da una base data)

Siano $v_1, \dots, v_k$ vettori lin. indip. di $\mathbb{R}^n$ e poniamo $L_1 = \langle\langle v_1 \rangle\rangle, L_2 = \langle\langle v_2 \rangle\rangle, \dots, L_k = \langle\langle v_k \rangle\rangle$ con $L_1 < L_2 < L_3 < \dots < L_k \Rightarrow$ 1) determiniamo i vettori $w_1, \dots, w_k$ ortogonali tali che $L'_j = \langle\langle w_1, \dots, w_j \rangle\rangle = L_j$ $\forall j = 1, \dots, k$

2) Inoltre se $u_1, \dots, u_k$ sono vettori con le stesse proprietà dei $w_1, \dots, w_k \Rightarrow u_j = \alpha_j w_j \quad \forall j = 1, \dots, k$

<u>dim</u> per induzione su k

a) $k = 1$ ovvio

b) si suppone vero fino a k e dimostriamolo per $k+1$ vettori: $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$

considero v_{k+1} e sia $L_k = \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$ cerco una decomposizione (di v_{k+1} COSÌ FATTA) t.c.: $v_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j + \tilde{w}$ con $\tilde{w} \in L_k^{\perp}$

~~[illegible]~~ Ho già trovato i vettori $w_1, \dots, w_k$ ortogonali tali che $\boxed{L'_j = L_j \quad \forall j = 1, \dots, k}$ per ipotesi induttiva $\Rightarrow$ prendo $w_{k+1} = \tilde{w} \Rightarrow w_{k+1}$ è $\perp$ ai w_j, $j = 1, \dots, k$; perché sta in $L_k^{\perp}$

Dobbiamo dimostrare che $L'_{k+1} = L_{k+1}$: $L'_{k+1} \subseteq L_{k+1} \Rightarrow$ i vettori w_j per $j = 1, \dots, k$ stanno in $L'_k = L_k$ PER IPOTESI E $L_k \subseteq L_{k+1}$ SEMPRE PER IPOTESI INDUTTIVA; INOLTRE

$w_{k+1} = \tilde{w} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j \in L_{k+1} \Rightarrow L'_{k+1} \subseteq L_{k+1}$ analogamente $L_{k+1} \subseteq L'_{k+1}$ (da fare)