1 DATA UNA MATRICE A, IL SUO DETERMINANTE È:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{\hat{ij}}| ;$$

- il termine $(-1)^{ij} |A_{\hat{ij}}|$ è detto COMPLEMENTO ALGEBRICO dell'elemento a_{ij}.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

complemento algebrico di $a_{12} \Rightarrow (-1)^{1+2} |A_{\hat{12}}| = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(36-4$

Determinanti e operazioni tra matrici

1) $\boxed{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ e } k \in \mathbb{R} \Rightarrow |kA| = ? \quad |kA| = k^n |A|}$ $\forall k \in \mathbb{R} \wedge \forall n \in \mathbb{N}$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -2 \qquad k = 3 \Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow |3A| = -18$

$|3A| = 9(-2) = 3^2(-2) = 3^2|A| \Rightarrow |kA| = k^2|A|$ se $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Se $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ allora $|kA| = k^3|A|$

SI DIMOSTRA, USANDO LA DEFINIZIONE DI DETERMINANTE, CHE SE $A \in M_{n\times n}$ si ha $|kA| = k^n |A|$ $\forall n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{R}$

2) Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ MOLTIPLICO LA PRIMA RIGA PER -3 e considero $B = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ottenuta tramite operazioni elementari riga $(R_1 \cdot (-3))$

$|A| = -2$, $|B| = 6 = -3 \cdot (-2) = -3|A|$

PROVIAMO CON UN ESEMPIO ULTERIORE PER $A \in M_{3\times3}$: SE MOLTIPLICHIAMO UNA RIGA PER K, OTTENENDO LA MATRICE B SI OTTIENE $|B| = k|A|$. COSÌ:

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$, posto $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k|A|$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{vmatrix} R_1(A) \\ R_2(A) \\ kR_i(A) \\ \vdots \\ R_n(A) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} k a_{ij} |A_{\hat{ij}}| = k\left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{\hat{ij}}|\right) = k|A|$$

c.v.d

3) Data A e $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow |A+B| \overset{?}{=} |A|+|B| \Rightarrow$ NO

CONTROESEMPIO:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$|A| = -2$ $|B| = 3$ $|A+B| = -4 \neq -2+3$

4) $\boxed{\text{Date } A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow |A\cdot B| = |A|\cdot|B|}$ * TEOREMA DI BINET

Matrice inversa di una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (quadrata) è, se esiste, quella matrice B tale che $A\cdot B = B\cdot A = I$ => Matrice identità

LA MATRICE INVERSA DI A SI INDICA CON A^{-1}.

Data $A \in M_{n\times n}$; supponiamo che sia invertibile, cioè:

$$\exists\, B \in M_{n\times n} \mid AB = BA = I$$

=> Che relazione c'è tra $|A|$ e $|B|$?

Supponiamo che $AB = I \Rightarrow |A\cdot B| = |I| \Rightarrow |A|\cdot|B| = 1$

$$\Rightarrow |B| = \frac{1}{|A|}$$

Osservazione: affinché una matrice sia invertibile è necessario che il suo determinante sia $\neq$ da 0

$|A| \neq 0$ oppure $rg\, A = n$

Date $A, B \in M_{n\times n}$ invertibili cioè $\exists\, A^{-1}$ e B^{-1}, =>

1) $(A+B)^{-1}$ nel caso che esista $(A+B)^{-1} \stackrel{?}{=} A^{-1} + B^{-1} \Rightarrow$ NO

Controesempio: .... (FARE PER CASA)

2) $(\lambda A)^{-1}$, $\lambda \neq 0$, invertibile se lo è A, $(\lambda A)^{-1} \stackrel{?}{=} \beta A^{-1}$

cercare β se esiste (FARE PER CASA)

PROPOSIZIONE: DATE $A, B \in M_{n \times n}$, INVERTIBILI $\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

DIMOSTRAZIONE

PER DEFINIZIONE DI $(A \cdot B)^{-1}$ SI HA: $(A \cdot B)^{-1} (A \cdot B) = I$

Moltiplichiamo a destra per B^{-1}

$(A \cdot B)^{-1} (A \cdot B) \cdot B^{-1} = I \cdot B^{-1}$ ESSENDO I L'ELEMENTO NEUTRO DELLA MOLTIPLICAZIONE $\Rightarrow$

$(A \cdot B)^{-1} \cdot A \underbrace{(B \cdot B^{-1})}_{= I} = B^{-1} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} \cdot (A \cdot I) = B^{-1}$

$\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} \cdot A = B^{-1}$ MOLTIPLICO A DESTRA PER A^{-1} $\Rightarrow$

$\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} \cdot \underbrace{(A \cdot A^{-1})}_{= I} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} \cdot I = B^{-1} \cdot A^{-1} \Rightarrow \boxed{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$

c.v.d.

(giustificato ogni passaggio)

PROPOSIZIONE:

Date: $A \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ 1) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

[VERIFICHIAMO L'UGUAGLIANZA DEGLI ORDINI:

Se $B^T \in M_{k \times n}$ e $A^T \in M_{n \times p}$ $\rightarrow (AB)^T \in M_{k \times p}$ e $B^T A^T \in M_{k \times p}$]

2) $(A^T)^T = A$

3) Prese $A, B \in M_{p \times n} \Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T$

PROPOSIZIONE:

• Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ chiamo "e" una op. elementare riga $\Rightarrow$ RICORDANDO CHE la matrice ottenuta da A mediante "e" si indica con $e(A)$ e ricordando che $A = I \cdot A = A \cdot I$, $\Rightarrow \boxed{e(I \cdot A) = (e(I)) \cdot A}$

Dimostrazione:

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$ "e" = scambio di riga (AD ESEMPIO $R_2 \to R_1$)

1° OPERAZIONE ELEMENTARE RIGA:

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\left(e \begin{pmatrix} 1 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \right) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & & \dots & a_{3n} \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & \dots & \dots & \dots & a_{3n} \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

PER CASA: dimostrare la proposiz. per le altre O.E.R. cioè PER LA SOSTITUZIONE CON UNA RIGA MOLTIPLICATA PER UNO SCALARE E PER LA SOSTITUZIONE CON UNA COMBINAZIONE LINEARE DI DUE RIGHE

c.v.d

COROLLARIO

Se ho 2 OP. ELE. RIGA $e_1, e_2 \Rightarrow e_2(e_1(A)) = (e_2(e_1(I))) \cdot A$

Se ho n O.E.R. $e_n(e_{n-1}(e_{n-2}(\dots(e_1(A))))) = (e_n(e_{n-1}(e\dots(e_1(I))))) \cdot A$

c.v.d

Prop: Sia $A \in M_{n \times n}$ invertibile $\Rightarrow$ la matrice inversa A^{-1} si TROVA APPLICANDO AD I le op. el. riga che riducono A in forma a gradini canonica NELLO STESSO ORDINE CIOÈ

$$(A \mid I) \sim (I \mid A^{-1})$$

Dimostrazione: la matrice che è la forma a gradini canonica di una matrice invertibile è: I QUINDI APPLICANDO SUCCESSIVAMENTE n OPERAZIONI ELEMENTARI $e_1, \dots, e_n$ SI HA $e_n(e_{n-1}(e_{n-2}\dots(e_2(e_1(A))))) = I$

$\Rightarrow$ $e_n(e_{n-1}(e_{n-2}\dots(e_2(e_1(I))))) \cdot A = I$

$\Rightarrow$ PER DEFINIZIONE $e_n(e_{n-1}(e_{n-2}(\dots(e_2(e_1(I))))) = A^{-1}$

c.v.d.

Operativamente:

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$ formo una matrice $n \times (2n)$ così:

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

SI RIDUCE LA MATRICE $(A \mid I) \in M_{n \times (2n)}$ A FORMA A GRADINI CANONICA

le operazioni che riducono A a forma a gradini canonica (I) riducono I ad A^{-1}