FORME BILINEARI IN UNO SPAZIO VETTORIALE V DEFINITO SU UN CAMPO K, con $\dim V = n$

Una forma bilineare è una applicazione $F: V \times V \to K$, con $V \times V = \{(v, w)$ coppie ordinate di vettori di $V\}$ che soddisfa alle proprietà: $F(v_1 + v_2, w) = F(v_1, w) + F(v_2 + w)$

$$F(\alpha v + w) = \alpha F(v, w)$$

$\forall v_1, v_2, v, w \in V$ e $\forall \alpha \in K$

$$\begin{cases} F(v, w_1 + w_2) = F(v, w_2) + F(v, w_2) \\ F(v, \beta w) = \beta F(v, w) \end{cases}$$

$\forall v, w, w_1, w_2 \in V$ e $\forall \beta \in K$

oppure

$F(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 F(v, w_1) + \beta_2 F(v_1, w_2)$

analogamente per la prima componente

<u>Esempio</u>: $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto xy$$

$F(x_1 + x_2, y) = (x_1 + x_2)y$

$F(x_1, y) + F(x_2, y) = x_1 y + x_2 y$

essendo uguali allora la prima parte è verificata.

$F(\alpha x, y) = \alpha x y$

$\alpha F(x, y) = \alpha(xy)$

per prop. associativa del prodotto in $\mathbb{R}$ ~~allora~~ $\alpha x y = \alpha(x, y)$.

per cui la linearità sulla prima componente <u>è verificata</u>.

Ora verifichiamo la linearità sulla seconda componente:

$F(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = x(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2)$

$\beta_1 F(x, y_1) + \beta_2 F(x, y_2) = \beta_1 x y_1 + \beta_2 x y_2$

vale prop distributiva del prodotto rispetto alla somma e vale la prop. commutativa

per cui i due risultati ottenuti sono uguali.

$\rightarrow$ è una forma bilineare in $\mathbb{R}$, DIMOSTRATO.

Una forma bilineare NON È un'applicaz. lineare, l'esempio sopra ne è un valido CONTROESEMPIO.

Dimostriamolo:

- $F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =$

$= F\left(\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \alpha_1 y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 x_2 \\ \alpha_2 y_2 \end{pmatrix}\right) =$

$= F\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \end{pmatrix} = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

$\parallel$

$\alpha_1^2 x_1 y_1 + \alpha_1 \alpha_2 x_1 y_2 + \alpha_1 \alpha_2 x_2 y_1 + \alpha_2^2 x_2 y_2$

- $\alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) =$

$= \alpha_1 F\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 F\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) = \alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2$

$\alpha_1^2 x_1 y_1 + \alpha_1 \alpha_2 x_1 y_2 + \alpha_1 \alpha_2 x_2 y_1 + \alpha_2^2 x_2 y_2 \neq \alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2$

è così dimostrata LA NON LINEARITÀ.

Sia $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare; fisso una base $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$
$\Rightarrow$ un generico elemento v di V è dato da $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, E COSÌ $w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j$

Cerco $F((v, w)) = F\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\right)\right)$

$\parallel$ per la linearità di F sulla 1ª componente

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F\left(\left(v_i, \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j F(v_i, v_j)\right)$

$= \sum_{j=1}^{n} \beta_j F((v_i, v_j)) =$ per la linearità sulla 2ª componente

$= \alpha_1 \beta_1 F((v_1, v_1)) + \alpha_1 \beta_2 F((v_1, v_2)) + \alpha_1 \beta_3 F((v_1, v_3)) + \dots + \alpha_1 \beta_n F((v_1, v_n)) +$
$+ \alpha_2 \beta_1 F((v_2, v_1)) + \dots + \alpha_2 \beta_n F((v_2, v_n)) + \dots + \dots$

$+\alpha_m \beta_1 F((v_m, v_1)) + \alpha_m \beta_2 F((v_m, v_2)) + \dots + \alpha_m \beta_m F((v_m, v_m))$

Ho trovato polinomio omogeneo di grado 2 che ha come variabili le coordinate dei vettori generici v, w di V.

Esempio precedente $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto xy$

$F(1,1) = 1$

$B_{\mathbb{R}} = \{1\}$

$v = x \cdot 1$

$w = y \cdot 1$

$F((x, y)) = F((1,1))\, xy$ CASO PARTICOLARE

con $x = \alpha_1$

$y = \beta_1$

$1 = F((1,1)) = F((v_1, v_1))$

A questo tipo di forme bilineari si può associare una matrice una volta fissata la base.

Data $F : V \times V \to K$ forma bilineare e fissiamo 2 basi in V,

$B_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$

$B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$

$\Rightarrow$ posso definire una MATRICE $A \in M_{m \times m}(K)$ in questo modo

$$\begin{pmatrix} F((v_1, w_1)) & F((v_1, w_2)) & F((v_1, w_3)) & \dots & F((v_1, w_m)) \\ F((v_2, w_1)) & F((v_2, w_2)) & F((v_2, w_3)) & \dots & F((v_2, w_m)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ F((v_m, w_1)) & F((v_m, w_2)) & F((v_m, w_3)) & \dots & F((v_m, w_m)) \end{pmatrix}$$

QUESTA È LA MATRICE CHE È ASSOCIATA AD F FISSATE LE BASI B_1 e B_2 IN V.

Adopero la matrice per scrivere in modo esplicito L'ESPRESSIONE ANALITICA DELLA FORMA BILINEARE

[Ricordo che se $L: V \to W$ è lineare $\Longrightarrow$ fissate le basi in V e W
$\Rightarrow [L(v)]_{B_W} = [L]^{B_W}_{B_V} \cdot [V]_{B_V}$]

Analogamente $F((v,w)) = \left([V]_{B_1}\right)^{T} \cdot [F]^{B_2}_{B_1} \cdot [w]_{B_2}$

// devo usare la trasposta per poter fare il prodotto

se $[V]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ e $[w]_{B_2} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \, [F]^{B_2}_{B_1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ è esattamente il polinomio soprascritto $\circledast$ $= F((v,w))$

Esempio

$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1 y_2 - 3 x_2 y_2$ è forma bilineare $\Rightarrow$ cerco la matrice associata ad F nelle basi canoniche

fisso le base canonica nei due ~~piani~~ DEL PRODOTTO CARTESIANO

$$\begin{pmatrix} F((e_1,e_1)) & F((e_1,e_2)) \\ \underbrace{F((e_2,e_1))}_{F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0} & \underbrace{F((e_2,e_2))}_{F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$\Longrightarrow$

$$F((x,y)) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (0, x_1 - 3x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - 3 x_2 y_2$$

Se cambio la base avrò un'altra matrice associata, che sarà però legata a quella trovata nel caso della base canonica.

Sia B_1 la base di V in entrambi gli spazi del prodotto cartesiano,

$$A = [F]^{B_1}_{B_1} \quad e \quad [v]_{B_1} = X \; , \; [w]_{B_1} = y$$

$$F((v,w)) = \boxed{X^T A y}$$

Cambio base in V, e la chiamo B_2 $\Longrightarrow$ se chiamo S la matrice del cambiamento di base

$$V, B_1 \xrightarrow{id} V, B_2$$

$$X \qquad X' = SX$$

$$y \longmapsto y' = Sy$$

inoltre la matrice associata ad F nella base B_2 cioè

$$[F]^{B_2}_{B_2} = B \Longrightarrow$$

$$X^T A Y$$

$$\|$$

$$F(v,w) = (X')^T B y' = \boxed{(SX)^T B (Sy) = X^T S^T B S y} =$$

quindi il legame tra matrici associate ad F in basi diverse è il seguente:

A e B

$$A = S^T B S$$ dove S è la matrice del cambio di base