18/12/2018

$id : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ (identità) lineare?
$v \longmapsto v$

$$id(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1\, id(v_1) + \alpha_2\, id(v_2)$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \qquad \text{È LINEARE}$$

Associamo ad id una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$: è la matrice identità $I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$?

Considero una base $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ nel dominio e nel codominio di Id

$\Rightarrow$ Costruisco $[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$; $v_1 = id(v_1) = \underbrace{\alpha_1}_{=1} v_1 + \underbrace{\alpha_2}_{=0} v_2 \dots \underbrace{\alpha_n}_{=0} v_n$

$$\Rightarrow [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

$v_2 = id(v_2) = \underbrace{\beta_1}_{=0} v_1 + \underbrace{\beta_2}_{=1} v_2 \dots \underbrace{\beta_n}_{=0} v_n$; $v_n = id(v_n) = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n$

$id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ dominio prendo la base $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$ e in
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^2$ codominio prendo $\mathcal{C}$

$$id\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}$$

$$id\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix} \qquad [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Se le basi del dominio e del codominio SONO DIVERSE $[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \neq I$; IN CONCLUSIONE

$$\boxed{[id]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = I \Leftrightarrow \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2}$$

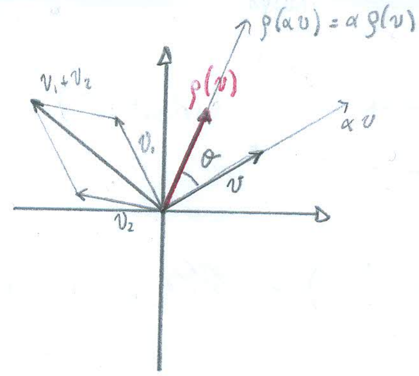
Considero $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dove ρ è una rotazione di verso positivo
$v \longmapsto \rho(v)$ e di angolo $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

Cerco $[\rho]$: fisso le basi negli spazi vettoriali: prendo $\mathcal{C}$ in entrambi

$$\rho\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\rho\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \beta_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

ρ è lineare?

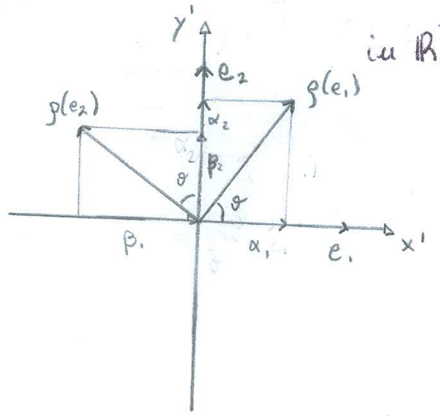


$\rho(\alpha v) = \alpha\rho(v)$

$\rho(v_1+v_2) = \rho(v_1) + \rho(v_2)$

(si può dimostrare geometricamente)

È LINEARE $\Rightarrow$ POSSIAMO ASSOCIARE UNA MATRICE



in $\mathbb{R}^2$ codominio

$\alpha_1 = |\rho(e_1)| \cos\theta$, $\quad 1 = |e_1|$

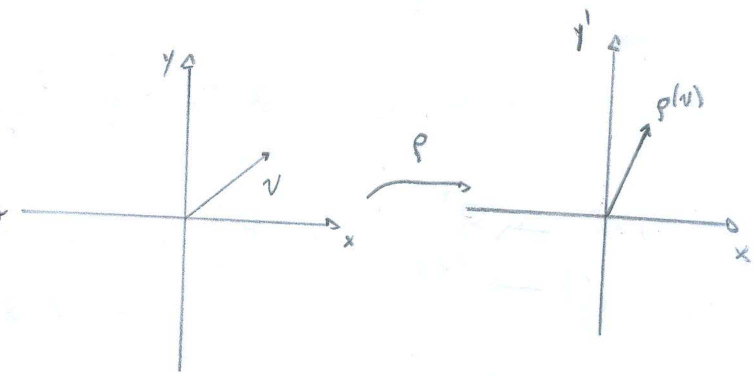
$\alpha_2 = |\rho(e_1)| \sin\theta$, $\quad 1 = |e_1|$

$\beta_1 = |\rho(e_2)| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -|e_2| \sin\theta = -\operatorname{sen}\theta$

$\beta_2 = |\rho(e_2)| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = |e_2| \cos\theta = \cos\theta$

$\rho\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$; $\alpha_1 = \cos\theta$, $\alpha_2 = \sin\theta$

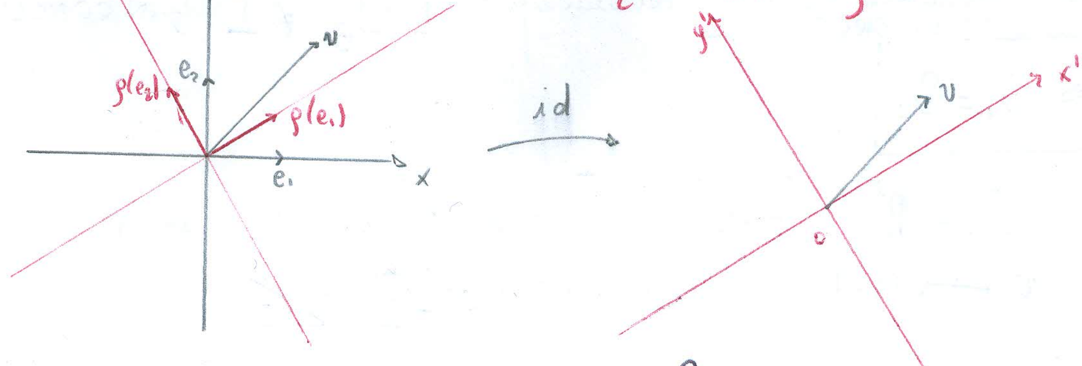
$\rho\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$; $\beta_1 = -\sin\theta$, $\beta_2 = \cos\theta$



$$[\rho]_e^e = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

~~Ea~~ Adesso lasciamo fisso il vettore e ruotiamo il sistema di riferimento

$B = \{\rho(e_1), \rho(e_2)\}$



esercizio: dare la matrice $[id]_e^B$ (FARE PER CASA)

coincide con la matrice del cambiamento di base

Siano $\mathcal{U}, V, \mathcal{W}$ spazi vettoriali con basi: $B_{\mathcal{U}}, B_V, B_{\mathcal{W}}$

sono date $L_1 : \mathcal{U} \to V$ e $L_2 : V \to \mathcal{W}$ lineari con matrici:

$$[L_1]^{B_V}_{B_{\mathcal{U}}} = A \quad \text{e} \quad [L_2]^{B_{\mathcal{W}}}_{B_V} = B$$

$\Rightarrow$ Considero $L_2 \circ L_1 : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ è lineare con matrice $[L_2 \circ L_1]^{B_{\mathcal{W}}}_{B_{\mathcal{U}}} = C$

$\Rightarrow$ Proposizione: $C = B \cdot A$

Dimostrazione: 1) ragioniamo sugli ordini delle matrici; PER PRIMA COSA.

Siano $\dim \mathcal{U} = n$, $\dim V = p$ e $\dim \mathcal{W} = r$

$$\Rightarrow A \in \mathcal{M}_{p \times n}, \quad B \in \mathcal{M}_{r \times p}, \Rightarrow C \in \mathcal{M}_{r \times n}$$

$\Rightarrow B \cdot A$ si può fare e risulta una matrice $\in \mathcal{M}_{r \times n}$ (ha lo stesso ordine di C) ORA DIMOSTRIAMO CHE SONO UGUALI

$$\left[(L_2 \circ L_1)(u)\right]_{B_{\mathcal{W}}} = C \cdot [u]_{B_{\mathcal{U}}} \quad \forall u \in \mathcal{U}$$

$$\parallel$$

$$\left[L_2(L_1(u))\right]_{B_{\mathcal{W}}} = B \cdot [L_1(u)]_{B_V} = B \cdot A\, [u]_{B_{\mathcal{U}}}$$

$$\Rightarrow C \cdot [u]_{B_{\mathcal{U}}} = B \cdot A \cdot [u]_{B_{\mathcal{U}}} \quad \forall u \in \mathcal{U} \Rightarrow C = B \cdot A \quad \boxed{\text{c.v.d}}$$

Sia $L : V \to \mathcal{W}$ lineare e invertibile $(\dim V = \dim \mathcal{W})$

Fissiamo le basi B_V e $B_{\mathcal{W}}$ $\Rightarrow$ abbiamo $[L]^{B_{\mathcal{W}}}_{B_V}$

Essendo L invertibile $\exists\, L^{-1}$ (l'inversa)$: \mathcal{W} \to V$ tale che $L^{-1} \circ L = id_V$ e $L \circ L^{-1} = id_{\mathcal{W}}$, L^{-1} è lineare $\Rightarrow$ posso costruire $[L^{-1}]^{B_V}_{B_{\mathcal{W}}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ si dimostra che $\left[L^{-1}\right]^{B_v}_{B_w} = \left(\left[L\right]^{B_w}_{B_v}\right)^{-1}$: INFATTI ?

è conseguenza della proposizione sopra dimostrata.

Se $L^{-1} \circ L = id_V$ $\Rightarrow$ per le matrici avremo:

$$\left[L^{-1}\right]^{B_v}_{B_w} \cdot \left[L\right]^{B_w}_{B_v} = \left[id_v\right]^{B_v}_{B_v} = I$$ (PERCHÈ ABBIAMO LA STESSA BASE NEL DOMINIO E NEL CODOMINIO DI id_v)

analogamente $L \circ L^{-1} = id_W$ $\Rightarrow$

$$\left[L\right]^{B_w}_{B_v} \cdot \left[L^{-1}\right]^{B_v}_{B_w} = \left[id_w\right]^{B_w}_{B_w} = I$$

$$\Rightarrow \left[L^{-1}\right]^{B_v}_{B_w} = \left[L\right]^{B_w \, -1}_{B_v} \qquad \boxed{\text{c.v.d.}}$$

Legame fra matrici associate alla stessa applicazione lineare in basi diverse: CREIAMO UN DIAGRAMMA DI FUNZIONI :

$$\begin{tikzcd} L:(V, B_v) \arrow[r, "L"] & (W, B_w) \\ L:(V, \tilde{B}_v) \arrow[u, "id_v"] \arrow[r, "L"] & (W, \tilde{B}_w) \arrow[from=1-2, to=2-2, "id_w"] \end{tikzcd}$$

$(V, B_v) \xrightarrow{L} (W, B_w)$ $\Rightarrow$ so che ho la matrice $\left[L\right]^{B_w}_{B_v}$

$(V, \tilde{B}_v) \xrightarrow{L} (W, \tilde{B}_w)$ $\Rightarrow$ posso costruire una matrice associata $\left[L\right]^{\tilde{B}_w}_{\tilde{B}_v}$ queste due matrici saranno legate in qualche modo, come?

Il diagramma creato è COMMUTATIVO :

$$\begin{tikzcd} id_v(v) = v \arrow[rrr, bend left] & L:(V, B_v) \arrow[r, "L(alto)"] & (W, B_w) & L(v) \arrow[dd] \\ & L:(V, \tilde{B}_v) \arrow[u, "id_v"] \arrow[r, "L(basso)"] & (W, \tilde{B}_w) \arrow[from=1-3, to=2-3, "id_w"] & \\ v \arrow[uu] & v \arrow[r, mapsto] & L(v) & id_w(L(id_v(v))) = L(v \end{tikzcd}$$

$$L_{(basso)} = id_W \circ L_{(alto)} \circ id_V$$

$$[L]^{\tilde{B}_W}_{\tilde{B}_V} = [id_W]^{\tilde{B}_W}_{B_W} \cdot [L]^{B_W}_{B_V} \cdot [id_V]^{B_V}_{\tilde{B}_V}$$

Considerando un OPERATORE: $L : V \longrightarrow V$; PRENDIAMO LA STESSA BASE NEL DOMINIO E NEL CODOMINIO:

$$\begin{tikzcd}
(V, B_V) \arrow[r, "L_{(alto)}"] & (V, B_V) \arrow[d, "(id_V)_2"] \\
(V, \tilde{B}_V) \arrow[u, "(id_V)_1"] \arrow[r, "L_{(basso)}"'] & (V, \tilde{B}_V)
\end{tikzcd}$$

Dato $[L]^{B_V}_{B_V}$ cerco $[L]^{\tilde{B}_V}_{\tilde{B}_V}$

$[(id_V)_1]^{B_V}_{\tilde{B}_V} = S$ mentre $[(id_V)_2]^{\tilde{B}_V}_{B_V} = S^{-1}$

$L_{basso} = (id_V)_2 \circ L_{ALTO} \circ (id_V)_1$

$$\Rightarrow [L]^{\tilde{B}_V}_{\tilde{B}_V} = [L]_{\tilde{B}_V} = S^{-1} \cdot [L]_{B_V} \cdot S$$

<u>Definizione</u>: Due matrici $A, B \in M_{n \times n}$ sono dette simili se $\exists$ una matrice invertibile S tale che $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$