LEZIONE 19/12/2018

DEFINIZIONE

Due matrici $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sono SIMILI se $\exists$ $S \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertibile tali che $B = S^{-1}AS$

osservazione

La relazione ~~da~~ di similitudini tra matrici $M(\mathbb{R})$ è una relazione di equivalenza e indichiamo il fatto che B è simile ad A, cioè $A \sim_S B$

quindi $A \sim_S B \iff \exists S$ invertibile con $B = S^{-1}AS$.

Dobbiamo dimostrare che $\sim_S$ è :

1) • riflessiva : $A \sim_S A \quad \forall A \in M_{n\times n}$

2) • simmetrica : Se $A \sim_S B \Rightarrow B \sim_S A \quad \forall A, B \in M_{n\times n}$

3) • transitiva : Se $A \sim_S B$ e $B \sim_S C \Rightarrow A \sim_S C \quad \forall A, B, C \in M_{n\times n}$

DIMOSTRAZIONE 2)

t.c. => tale che

$A \sim_S B \Rightarrow \exists S$ invertibile $| B = S^{-1}AS \Rightarrow SB = \underbrace{SS^{-1}}_{=I}AS \Rightarrow SB = AS \Rightarrow$

dobbiamo dimostrare che $\exists$ T invertibile $| A = T^{-1}BT$

$\Rightarrow$ moltiplico a destra per $S^{-1} \Rightarrow SBS^{-1} = A\underbrace{SS^{-1}}_{=I} = A$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow$ cerco $T | A = T^{-1}BT$

$\Rightarrow$ La T cercata sarà S^{-1} . c.v.d

DIMOSTRARE 1) e 3) ..

Possiamo cercare quindi le classi di equivalenza di matrici simili.

N.B. Ricordo che matrici associate allo stesso operatore in basi diverse sono SIMILI, e possiamo quindi dire che ogni classe di similitudine di matrici corrisponde ad un operatore.

PROPRIETÀ DI MATRICI SIMILI

1) Se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $A \underset{S}{\sim} B \Rightarrow |A| = |B|$

DIMOSTRAZIONE

(PER IL TEOREMA DI BINET

$A \underset{S}{\sim} B \Rightarrow \exists\, S$ invertibile $\mid B = S^{-1}AS \Rightarrow |B| = |S^{-1}AS| = |S^{-1}||A||S|$

$= \boxed{|S|^{-1} \cdot |A| \cdot |S| = |A| \cdot |S|^{-1} \cdot |S| = |A|}$

$\Rightarrow$ Matrici simili hanno lo stesso det, c.v.d.

2) Se $A \underset{S}{\sim} B \Rightarrow rg\, A = rg\, B$ poiché $Im\, L$ con L operatore $\mid A = [L]_B^B$

3) Se $|A| = |B| \not\Rightarrow A \underset{S}{\sim} B$ *

(NON IMPLICA)

* (Dare un controesempio per esercizio)

OSSERVAZIONE:

4) Se $A \sim B \not\Rightarrow A \underset{S}{\sim} B$

Prendiamo $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ **DEFINIZIONE**: Chiamo POLINOMIO CARATTERISTICO di A, $P_A(\lambda)$, nella variabile reale λ il polinomio $\boxed{P_A(\lambda) = |A - \lambda I|}$

ESEMPIO

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ costruisco $A - \lambda I$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

POLINOMIO CARATTERISTICO $= P_A(\lambda) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)-6 =$
$= \lambda^2 - 5\lambda - 2$

Il suo grado è pari all'ordine della matrice.

ESEMPIO 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ costruisco $-A + \lambda I$: $\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)-6$

Se prendo $\lambda I - A$ il coefficiente di grado massimo è sempre pari a $+1$. => SI DICE CHE IL polinomio è monico.

\# In molti testi $P_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ ottenendo così sempre un polinomio monico.

OSSERVAZIONE

I coefficienti del polinomio caratteristico di una matrice A sono ottenuti dai determinanti delle sottomatrici principali (LE DIAGONALI PRINCIPALI DI TALI SOTTOMATRICI SONO FORMATE DALLE ENTRATE DELLA DIAGONALE PRINCIPALE DI A) in questo modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Pongo $C_K = (-1)^{n-K} (\Sigma \text{ minori principali di } A \text{ di ordine } K)$

$$\Rightarrow \boxed{P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + C_2 \lambda^{n-2} + \ldots + C_{n-1}\lambda + C_n}$$

con $A \in M_{n\times n}$.

$C_n = \det A$

$C_1 = (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \right) = (-1)^{n-1} \cdot Tr(A)$

\# Traccia di A

(RICORDO CHE LA TRACCIA DI $A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$)

PROPOSIZIONE

Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, cioè se

$A \underset{S}{\sim} B \Rightarrow P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$

DIMOSTRAZIONE

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| \quad e \quad P_B(\lambda) = |B - \lambda I|$$

Per ipotesi $A \underset{S}{\sim} B \Rightarrow \exists S$ invertibile tale che $B = S^{-1}AS \Rightarrow |B - \lambda I| =$

$$= |S^{-1}AS - \lambda SS^{-1}| = |S^{-1}AS - S^{-1}\lambda I S| = |S^{-1}(AS - \lambda I S)| = |S^{-1}(A - \lambda I)S|$$

$$= |S^{-1}||A - \lambda I||S| = |S^{-1}|A - \lambda I||S| = |S^{-1}||A - \lambda I||S| = |A - \lambda I| = P_A(\lambda)$$

(DIMOSTRARE CHE:
Se due polinomi coincidono non è detto che le matrici siano simili)

DEFINIZIONE

Si dice radice caratteristica di $A \in M_{n \times n}$ ogni radice di $P_A(\lambda)$.

La "molteplicità" di tale radice caratteristica è la sua molteplicità algebrica come radice di $P_A(\lambda)$, cioè se λ_0 è una radice di $P_A(\lambda) \Rightarrow P_A(\lambda)$ si può scomporre nel prodotto $(\lambda - \lambda_0)^K q(\lambda)$ con $q(\lambda)$ polinomio in λ non più divisibile per $(\lambda - \lambda_0)$ con deg $q(\lambda) = n - K \Rightarrow K$ è la molteplicità di λ_0 e si indica $K = \mu(\lambda_0)$

"mi"

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)-6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

$$\lambda^2 - 5 - 2 = 0 \qquad \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2} = \begin{cases} \frac{5+\sqrt{33}}{2} \\ \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

Ho trovato $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2} \Rightarrow p_A(\lambda)$ si scompone così:

$$p_A(\lambda) = \left(\lambda - \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right) \Rightarrow \mu(\lambda_1) = 1 \quad \text{e} \quad \mu(\lambda_2) = 1$$

$\boxed{\text{ESEMPIO:}}$

Sia $A \in M_{5\times5}$: Se $p_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1)^2\lambda$ ho $\lambda_1 = 2$ con $\mu(2) = 2$

$\lambda_2 = -1$ $\quad \mu(-1) = 2$

$\lambda_3 = 0$ $\quad \mu(0) = 1$