20/03/2019

Esempio: costruire la matrice associata a $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto 2x_1y_1 - 3x_2y_1 + x_3y_3$$

nella base $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,1)^T, (2,-1,0)^T, (0,0,1)^T\}$

Osservazione: F è forma bilineare (espressa nella forma di un polinomio di 2° grado con le variabili dei due sp. vettoriali)

la matrice associata a F, $[F]^{B_{\mathbb{R}^3}}_{B_{\mathbb{R}^3}}$ è

$$[F]^{B_{\mathbb{R}^3}}_{B_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) & F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right) & F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \\ F\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) & F\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right) & F\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \\ F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) & F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right) & F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$[F]^{B_{\mathbb{R}^3}}_{B_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ossia la matrice associata alla forma bilineare nella $B_{\mathbb{R}^3}$

Alla stessa forma bilineare posso associare infinite matrici (in basi diverse).

Date le matrici A e B $\in M_{n \times n}(K)$ matrici associate in basi diverse alla stessa f. bilineare, esse sono legate fra loro dalla relazione $B = S^T \cdot A \cdot S$ con S = matrice del cambiamento di base.

Definizione: Due matrici quadrate A e B si dicono CONGRUENTI se ~~esiste~~ $\exists\, S \in M_{n \times n}(K)$, S invertibile, tale che $B = S^T \cdot A \cdot S$

$\Rightarrow$ indichiamo tale relazione con il simbolo $\sim_c$

quindi $A \sim_c B \Leftrightarrow \exists\, S$ invertibile $\mid B = S^T A S$

la relazione $\sim_c$ è di equivalenza (da dimostrare)

- simmetrica $A \sim_c B \Rightarrow B \sim_c A$
- riflessiva $A \sim_c A \Rightarrow A = S^T \cdot A \cdot S$ ossia $A = I \cdot A \cdot I$ (matrice identità)
- transitiva $A \sim_c B$ e $B \sim_c C \Rightarrow A \sim_c C$

②

Analizziamo il determinante di due matrici congruenti:

$\exists\, S$ invertibile t.c. $B = S^T A S \Rightarrow |B| = |S^T A S| = |S^T||A||S| = |S||A||S| =$
(applicazione teorema di Binet) $= |S|^2 |A|$

Notiamo che $|S|$ è sempre $\neq 0$ in quanto invertibile per definizione.

Ne segue che se $|A| = 0 \Rightarrow |B| = 0$

(il rango si mantiene)

Proposizione: matrici congruenti hanno lo stesso rango.

Lemma: Siano $A, S \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, S invertibile $\Rightarrow rg\, S = n$
$\Rightarrow rg(AS) = rg(SA) = rg\, A$

relativa al lemma

Dimostrazione: $rg(AS) = rg\, A$

Una delle definizioni di rango è che rg è uguale al numero massimo di colonne linearmente indipendenti. Siano $C_S^1, C_S^2, C_S^3 \dots C_S^n$ le colonne di S

Considero che le colonne di AS: $AC_S^1, AC_S^2, \dots, AC_S^n$. Tali vettori sono combinazioni lineari delle colonne di A. Ne segue che $\boxed{rg(AS) \leq rg\, A}$. D'ALTRA PARTE:

$$rg\, A = rg(ASS^{-1}) = rg((AS)S^{-1}) \leq rg(AS) \leq rg\, A \Rightarrow$$

$rg\, A = rg(AS)$

Pertanto siccome $rg\, A$ è uguale a sé stesso si ha che $\boxed{rg\, A = rg(AS)}$

Ora procedo col dimostrare che $rg\, A = rg(SA)$

$rg(SA) = rg((SA)^T) = rg(A^T S^T) = rg\, A^T = rg\, A$ si ha che $\boxed{rg\, A = rg\, SA}$

$\Rightarrow \boxed{rg(AS) = rg\, A = rg(SA)}$

c.v.d.

Dimostrazione della proposizione: Se $A \sim_c B \Rightarrow rg\, A = rg\, B$

So che $\exists\, S$ t.c. $B = S^T \cdot A \cdot S \Rightarrow rg\, B = (S^T(AS)) = rg\, AS$ (dimostrato in precedenza) $= rg\, A$ c.v.d.

Se una matrice associata ad una forma bilineare in una base data HA RANGO K allora ogni altra matrice ad essa associata ha rango k.
K è detto rango della forma bilineare. Se esso è massimo, la forma bilineare è detta <u>NON DEGENERE</u>. In caso contrario è detta <u>DEGENERE</u>.

<u>Definizione 1)</u> Una forma bilineare $F: V \times V \to K$ è detta <u>simmetrica</u> se $F((v,w)) = F((w,v)) \ \forall v,w \in V$

Fissata una base B_V in $V \Rightarrow$ se F è simmetrica, $[F]_{B_V}$ è simmetrica.
Infatti essendo l'elemento a_{ij} di tale matrice, dato da

$a_{ij} = F((v_i, v_j))$ dove $B_V = \{v_1 \dots v_n\}$

$\Rightarrow$ l'elemento $a_{ji} = F((v_j, v_i))$ ed essendo F simmetrica, si ha che

$$F((v_i,v_j)) = F((v_j,v_i)) \ \forall i,j = 1 \dots n \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j$$

La simmetria dell'applicazione mi dà quindi la simmetria della matrice in una qualunque base.

<u>Definizione 2)</u> Una forma bilineare $F: V \times V \to K$ è detta <u>ANTISIMMETRICA</u> se $F((v,w)) = -F((w,v)) \ \forall v,w \in V$. Ogni matrice associata ad una forma antisimmetrica è antisimmetrica.

<u>Definizione 3)</u> Una forma bilineare $F: V \times V \to K$ è detta <u>ALTERNANTE</u> se $F((v,v)) = 0 \ \forall v \in V$

<u>Osservazione</u>: Se $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C} \Rightarrow F$ è alternante $\Leftrightarrow$ è antisimmetrica.
(dimostrazione da fare)

<u>Esercizio</u> Due matrici con rango uguale possono non essere congruenti (da fare)