DATO LO SPAZIO VETT. V, $W, U \subset V \Rightarrow W \cap U$ È SOTTOSPAZIO VETT.? 20/11/2018

DIMOSTRAZIONE

1) Sia $x \in (W \cap U) \Rightarrow \alpha x \in (W \cap U)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$?

αx appartiene a W e anche a U PERCHÈ SONO SOTTOSPAZI VETTORIALI

quindi $\alpha x \in (W \cap U)$

2) ~~(W∩U)+x(W∩U)~~ ~~xxxxxxxxxx~~

Dati $x_1, x_2 \in (W \cap U) \Rightarrow x_1 + x_2 \in (W \cap U)$?

$x_1, x_2 \in W \wedge x_1, x_2 \in U \Rightarrow$

$x_1 + x_2 \in W \wedge x_1 + x_2 \in U$ PERCHÈ SOTTOSPAZI

$\Downarrow$

$x_1 + x_2 \in W \cap U$

3) $0 \in U$, $0 \in W \Rightarrow 0 \in U \cap W \Rightarrow U \cap W$ è sottospazio vettoriale

---

TEOREMA DI GRASSMANN

Dati U, W sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale $V \Rightarrow \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = \dim(U+W)$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\dim V = n$, $\dim U = p$, $\dim W = q$

$p \leq n$ e $q \leq n$ e $\dim(U \cap W) = k$

Sia $\mathcal{B}_{U\cap W} = \{v_1, \dots, v_k\} \Rightarrow$ Completo tale base ad una base di U: $\mathcal{B}_U = \{v_1, \dots, v_k, u_1 \dots u_{p-k}\}$

ed una base di W: $\mathcal{B}_W = \{v_1, \dots v_k, w_1 \dots w_{q-k}\}$

prendo $v \in U + W$

i vettori di $U + W$ sono dati COME somma di un vettore di U con un vettore di W

(cioè $U + W = \{u + w \mid u \in U$ e $w \in W\}$)

$$\Rightarrow v = u + w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{p-k} \beta_i u_i + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i v_i + \sum_{i=1}^{q-k} d_i w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \gamma_i) v_i + \sum_{i=1}^{p-k} \beta_i u_i + \sum_{i=1}^{q-k} d_i w_i$$

$\Rightarrow$ i generatori di $U + W$ sono quindi $\cancel{k} + p - \cancel{k} + q - k$

$= p + q - k = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$

Se dimostro che tali $p+q-k$ generatori sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ essi formano una base di $U + W$ e quindi il teorema è dimostrato.

Considero: $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_{p-k} u_{p-k} + \dots + b_1 u_1 + c_1 w_1 + \dots + c_{q-k} w_{q-k} = 0$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{i=1}^{p-k} b_i v_i}_{\in U} = \underbrace{- \sum_{i=1}^{q-k} c_i w_i}_{\in W} \qquad \in U \cap W$$

$$- \sum_{i=1}^{q-k} c_i w_i = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{q-k} c_i w_i + \sum_{i=1}^{k} \varphi_i v_i = 0$$

Essendo $\mathcal{B}_W = \{v_1 \dots v_k, w_1, \dots w_{q-k}\}$ una base di W tali vettori sono linearmente indipendenti e quindi

$c_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, q-k$ e $\varphi_i = 0 \ \forall i = 1, \dots k$

SOSTITUENDO $c_i = 0 \ \forall i = 1, \dots,$ nella combinazione iniziale che (RIMANE) $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 u_1 + \dots + b_{p-k} u_{p-k} = 0$

Essendo $\mathcal{B}_U = \{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{p-k}\}$ base di U sono linearmente indipendenti e quindi

$\alpha_i = 0 \ \forall i = 1 \dots k$ e $b_i = 0 \ \forall i = 1 \dots p-k$

$\Rightarrow v_1 \dots v_k, u_1 \dots u_{p-k}, w \dots w_{p-k}$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $U + W$

c.v.d.

Conseguenza (del teorema di Grassmann)

Due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3, diversi, possono intersecarsi solo nell'origine?

Sia U, $\dim U = 3$ e W; $\dim W = 3$ $U \neq W$

per il teorema di Grassmann

$$\dim U + \dim W - \dim U \cap W = \dim(U+W)$$

$3 + 3 - 0 = 6$ NON PUÒ AVERE DIMENSIONE >4

$3 + 3 - 1 = 5$ NO

$3 + 3 - 2 = 4$ SI

i due sottospazi si intersecano in un piano

SISTEMI LINEARI NON OMOGENEI

Sia $\Sigma : Ax = B$ un sistema lineare non omogeneo

con $A \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $B \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$

$\exists$ soluzioni? Se non sempre, quando esistono?

TEOREMA DI ROUCHÈ - CAPELLI

Dato il sistema $Ax = B$ con A matrice dei coefficienti e $(A \vdots B)$ matrice completa del sistema

il sistema ha soluzioni $\Leftrightarrow$ $rg A = rg (A \vdots B)$

Dimostrazione

"$\Rightarrow$" Sia $\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ una soluzione di $\Sigma \rightarrow A\tilde{X} = B$

cioè $\tilde{x}_1 C^1(A) + \tilde{x}_2 C^2(A) + \dots + \tilde{x}_n C^n(A) = B$

cioè B è combinazione lineare delle colonne di A

quindi B è linearmente dipendente dalle colonne di $A \Rightarrow rg A = rg (A \vdots B)$

"$\Leftarrow$" viceversa la dimostrazione si può fare procedendo all'indietro nella dimostrazione di "$\Rightarrow$"

c.v.d.

Studiamo $Sol\,\Sigma$, cioè lo spazio delle soluzioni di Σ.

VEDIAMO se è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$: posto $\Sigma : AX = B$

con $A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$

Siano $\tilde{x}$ e $\tilde{y} \in Sol\,\Sigma \Rightarrow A\tilde{x} = B$ e $A\tilde{y} = B$

$\tilde{x} + \tilde{y} \in Sol\,\Sigma$? ; $A(\tilde{x}+\tilde{y}) = A\tilde{x} + A\tilde{y} = B + B \neq B$

non è sottospazio vettoriale !

__Proposizione__

Dato $\Sigma : AX = B$ e $\Sigma_0 : AX = 0$ sistema omogeneo associato

data $\tilde{x} \in Sol\,\Sigma \Rightarrow \boxed{Sol\,\Sigma = \tilde{x} + Sol\,\Sigma_0}$ cioè

$Sol\,\Sigma = \{\tilde{x} + v_0 \mid v_0 \in Sol\,\Sigma_0\}$

__Dimostrazione__

"$\subseteq$" devo dimostrare che se $\tilde{y}$ è soluzione di Σ

$\exists\, v_0 \in Sol\,\Sigma_0$ tale che $\tilde{y} = \tilde{x} + v_0$.

$A\tilde{y} = B$ e $A\tilde{x} = B \Rightarrow A\tilde{y} = A\tilde{x} \Rightarrow A(\tilde{y} - \tilde{x}) = 0$

$\Rightarrow \tilde{y} - \tilde{x} \in Sol\,\Sigma_0 \Rightarrow v_0 = \tilde{y} - \tilde{x}$

"$\supseteq$" Sia $\tilde{z} = \tilde{x} + v_1$ con $v_1 \in Sol\,\Sigma_0$

devo dimostrare che $\tilde{z} \in Sol\,\Sigma$ cioè $A\tilde{z} = B$: INFATTI

$A(\tilde{x} + v_1) = A\tilde{x} + Av_1 = B + 0 = B$

esempio $\Sigma : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x - 2y = -1 \end{cases}$ $\quad \Sigma_0 \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$ $\quad Sol\,\Sigma_0 =$ È UNA RETTA $=$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$

CERCO $\tilde{x} \in Sol\,\Sigma$: $x = 1 - 2y \Rightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$Sol\,\Sigma = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + Sol\,\Sigma_0$