21/11/2018

Dato Σ sistema lineare non omogeneo $\Sigma: AX=B$ e Σ_0 il sistema omogeneo associato $\Sigma_0: AX=0 \Rightarrow Sol\,\Sigma = \tilde{X} + Sol\,\Sigma_0$ dove $\tilde{X}$ è una soluzione particolare di Σ

Esempio: $\Sigma: 3x+2y=1$

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\end{pmatrix}_{1\times2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_{2\times1}=1 \Rightarrow \Sigma_0:\begin{pmatrix}3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0 \quad 3x+2y=0$$

Se $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ è soluzione generale di $\Sigma \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix}+$ Sol. generale dell'omogeneo

$3x+2y=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x \Rightarrow$

y	x
$-\frac{3}{2}$	1

È stato trovato il vettore $v=\begin{pmatrix}1\\-3/2\end{pmatrix}$, che è una soluzione fondamentale di Σ_0 (base di $Sol\,\Sigma_0$)

y	x
$-\frac{3}{2}s$	s

la soluzione generale di Σ_0 è $\begin{pmatrix}s\\-3/2s\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\-3/2\end{pmatrix}$

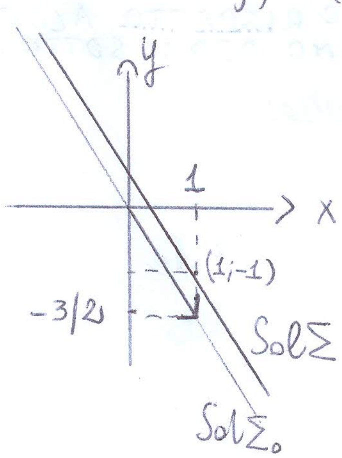
$Sol\,\Sigma_0=\left\{s\begin{pmatrix}1\\-3/2\end{pmatrix}, s\in\mathbb{R}\right\}$

Trovo $\tilde{X}$, cioè una soluzione particolare di Σ:

$3x+2y=1 \Rightarrow y=\frac{1-3x}{2}$

Sostituisco alla variabile x un valore numerico, scelgo $x=1$ e risulta $y=-1$. Pertanto $\tilde{X}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

e $Sol\,\Sigma \; \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-3/2\end{pmatrix}$



IL SISTEMA SCALARE ASSOCIATO ALLA EQUAZIONE VETTORIALE, è l'<u>equazione parametrica</u> dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases}x=s+1\\ y=-\frac{3}{2}s-1\end{cases}$$

STUDIAMO IN GENERALE SPAZI COME $Sol\,\Sigma$

Diamo un'applicazione $T_a : V \to V$, con V spazio vettoriale n-dimensionale così fatta: $\forall v \in V$ $T_a(v) = a + v$, CON $a \in V$

T_a è detto TRASLAZIONE di vettore a; è biettiva (fare per esercizio).

DEFINIZIONE:

Dato un sottospazio vettoriale $W < V$, la sua immagine $T_a(W)$ è detta SOTTOSPAZIO AFFINE di V; quindi: un sottospazio affine è il traslato di un sottospazio vettoriale.

Come caso particolare, Sol Σ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$, con $n = \#$variabili del sistema.

In generale, un sottospazio affine $\mathcal{A} = a + W$ di V non è un sotto spazio vettoriale: Dati $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, vediamo se $a_1 + a_2 \in \mathcal{A}$:

$a_1 = a + w_1$ e $a_2 = a + w_2$, PER DEFINIZIONE DI $\mathcal{A}$, $\Rightarrow$

$a_1 + a_2 = a + w_1 + a + w_2 = 2a + w_3$, dove $w_3 = w_2 + w_1$

$2a + w_3 \neq a + w_4$ pertanto $a_1 + a_2 \notin \mathcal{A}$

L'unico caso di sottospazio affine che è anche sottospazio vettoriale si ha per $a = 0$ (ossia il vettore della traslazione è il vettore nullo). Viceversa, i sottospazi vettoriali sono sottospazi affini. $(a = 0)$

Definizione: La dimensione di un sottospazio affine $\mathcal{A} = a + W$ è la dimensione di W

Vediamo quando la ~~somma~~ combinazione lineare di due elementi di $\mathcal{A}$ sta ancora in $\mathcal{A}$. IL SOTTOSPAZIO VETTORIALE È CHIUSO RISPETTO ALLE COMBINAZIONI LINEARI DI DUE VETTORI: VEDIAMO PER IL SOTTOSPAZIO AFFINE

Considero $a_1, a_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists\, w_1, w_2 \in W$ tali che:

$a_1 = a + w_1$ e $a_2 = a + w_2$

Considero la combinazione lineare $\alpha a_1 + \beta a_2$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Quando $\alpha a_1 + \beta a_2 \in \mathcal{A}$? Quando $\exists\, w \in W$ tale che

$\alpha a_1 + \beta a_2 = a + w$

$\alpha a + \alpha w_1 + \beta a + \beta w_2 = (\alpha+\beta) a + \underbrace{\alpha w_1 + \beta w_2}_{\in W}$, perché la combinazione lineare di due elementi di W sta ancora in W. Pertanto $(\alpha+\beta) a + w \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \alpha+\beta = 1$

Osservazioni:

1) Se il sottospazio affine $\mathcal{A} = a + W$ è ottenuto traslando W del vettore $a \Rightarrow$ W è unico. Infatti: supponiamo che $\mathcal{A} = a + W$ e anche $\mathcal{A} = a + W_1$

$a + W = a + W_1 \Rightarrow W = W_1$

2) Se $\mathcal{A} = a + W \Rightarrow a \in \mathcal{A}$ perché $a = a + 0$ e quindi è della forma $a + w$ e appartiene ad $\mathcal{A}$

3) Se $\mathcal{A} = a + W \Rightarrow a$ non è unico: è sufficiente prendere un qualunque altro $b \in \mathcal{A} \Rightarrow a + W = b + W$

Infatti ogni elemento di $a + W$ si scrive mediante b.

Dimostriamo che a si scrive come $b + w$, con $w \in W$.

Sappiamo che $b \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists v \in W$ tale che $b = a + v \Rightarrow a = b - v$
$\Rightarrow a = b + w$

Definizione: il sottospazio vettoriale W tale che $\mathcal{A} = a + W$ (cioè il sottospazio affine che è traslato di W) è detto DIREZIONE o GIACITURA di $\mathcal{A}$

Definizione 1) Due sottospazi affini della stessa dimensione sono paralleli se ~~[illegible]~~ hanno la stessa direzione.

2) Se $\mathcal{A}_1 = a_1 + W_1$ e $\mathcal{A}_2 = a_2 + W_2$ con $\dim \mathcal{A}_1 < \dim \mathcal{A}_2$
$\Rightarrow \mathcal{A}_1 // \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow W_1 \subset W_2$

Quali sono i sottospazi affini di $\mathbb{R}$? Tutti i punti. e $\mathbb{R}$

" " $\mathbb{R}^2$? Tutti i punti, tutte le rette ed il piano.

Considero in $\mathbb{R}^2$ la retta, come sottospazio affine 1-dimensionale.
L'equazione cartesiana è $ax+by+c=0$
La sua equazione parametrica:

$$y = \frac{-ax-c}{b} \quad b \neq 0 \iff y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$\begin{cases} x = s \\ y = -\frac{a}{b}s - \frac{c}{b} \end{cases}$$ eq. parametrica

Equazione vettoriale: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -c/b \end{pmatrix}$

Se a è dato da $ax+by+c=0 \Rightarrow W$ sua direzione è $ax+by=0$

Se $r_1: a_1x+b_1y+c_1=0$
$r_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ $\Rightarrow r_1 // r_2$ se $a_1x+b_1y=0$ è lo stesso di $a_2x+b_2y=0$
cioè $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

EQUIVALENTEMENTE:
Considero il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

Deve essere

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 1$$

e quindi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

se $rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \vdots & c_1 \\ a_2 & b_2 & \vdots & c_2 \end{pmatrix}$,

ossia se $rg\, A = rg(A \vdots B) = 1$, le due rette coincidono.

Se $rg\, A = 1$ e $rg(A \vdots B) = 2$, le due rette non coincidono MA SONO //