CLASSIFICAZIONE OPERATORI ISOMETRICI IN $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ ortogonali $\quad A^{-1} \equiv A^T$

- $A^{-1} \cdot A = I$

$A^T \cdot A = I \Rightarrow |A^T \cdot A| = |I| \underset{\text{per th Binet}}{\Rightarrow} |A^T| \cdot |A| = |I| = 1 \Rightarrow |A||A| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1$

$\Rightarrow |A| = \pm 1$

(IN UNA MATRICE ORTOGONALI I VETTORI RIGA E COLONNA SONO ORTONORMALI) SAPPIAMO CHE $A^T A = I$:

$A^T \cdot A = I \qquad A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ba+dc & b^2+d^2 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ l'uguaglianza di matrici deve essere scritta come sistema

prodotto scalare dei vettori riga e colonna

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+c^2=1 \\ ab+cd=0 \\ b^2+d^2=1 \end{cases} \underset{\boxed{b\neq 0}}{\Rightarrow} \begin{cases} \left(\frac{-cd}{b}\right)^2+c^2=1 \\ a=\frac{-cd}{b} \\ b^2+d^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2d^2+c^2b^2=b^2 \\ a=\frac{-cd}{b} \\ b^2+d^2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2(d^2+b^2)=b^2 \\ a=\frac{-cd}{b} \\ b^2+d^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2=b^2 \\ a=-\frac{cd}{b} \\ b^2+d^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=\pm b \\ a=-\frac{cd}{b} \\ b^2+d^2=1 \end{cases}$$

$\underset{c=b}{\Rightarrow} \begin{cases} c=b \\ a=-d \\ b^2+d^2=1 \end{cases}$ riportare nella matrice A

$\underset{c=-b}{\Rightarrow} \begin{cases} c=-b \\ a=d \\ b^2+d^2=1 \end{cases}$ riportare nella matrice A

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -a^2-b^2 \quad$ con $c=+b$

$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a^2+b^2 \quad$ con $c=-b$

Sapendo che $a^2+b^2=1$ é possibile considerare a e b come seno e coseno :

$a = \cos\alpha$
$b = \sin\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

per $\alpha \in]0, \pi[$ (poiché $b \neq 0$)

$$\begin{cases} a^2+c^2=1 \\ ab+cd=0 \\ b^2+d^2=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b=0} \quad \begin{cases} a^2+c^2=1 \\ cd=0 \\ d^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ c=0 \\ d=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm 1 \\ c=0 \\ d=\pm 1 \end{cases}$$

sostituire come matrici: 4 casi

$$\underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} ; \quad \underset{-I}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} ; \quad \underset{C}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} ; \quad \underset{D}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Sono state ottenute sei matrici risultanti di cui deve essere definito il determinante:

$1 = |I|; |-I|; |B|$

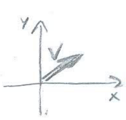
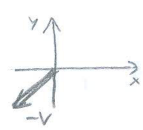
$-1 = |A|; |C|; |D|$

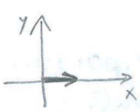
$[T(v)]_C = [T]_C [v]_C$

· Operatori isometrici: id $\underset{\text{rotazione } \alpha=0}{(I)}$, simmetria rispetto all'origine $\underset{\text{rotazione } \alpha=\pi}{(-I)}$, rotazione di angolo α (B)

Gli unici operatori per matrici che hanno determinante pari a +1 sono rotazioni.

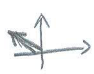
(I) è banale

(-I)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-x, -y)$ 

(B)  $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$ 

· simmetria rispetto all'asse y (C), simmetria rispetto all'asse x (D)

sono simmetrie rispetto a una retta

(C)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ 

(D)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ 

· $A = B \cdot D$ → l'applicazione associata alla matrice A è una composizione di una rotazione e una simmetria (oppure prima simmetria poi rotazione)

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Gli operatori isometrici in $\mathbb{R}$ sono quindi solo rotazioni e simmetrie. Rotazioni $\to$ det $=1$, simmetrie $\to$ det $=-1$ e simmetriche

C'é anche la traslazione ma non si ottiene da matrici

TEOREMA DI STRUTTURA DEGLI OPERATORI ISOMETRICI

Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operatore isometrico $\Rightarrow \exists$ una base $\mathcal{B}_{\perp_n}$, ortonormale di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$[T]_{\mathcal{B}_{\perp_n}} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \ddots & 1 \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & \ddots & -1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} M_1 & & \\ & M_2 & \\ & & \ddots \; M_k \end{matrix} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

(con blocchi delimitati agli indici p e q)

con $M_J = \begin{pmatrix} \cos\alpha_J & -\sin\alpha_J \\ \sin\alpha_J & \cos\alpha \end{pmatrix}$ matrici di rotazione, $J = 1, \dots, k$, $\alpha \in]0, \pi[$

In $\mathbb{R}^3$: I, $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Dimostrazione: per induzione su $n = \dim \mathbb{R}^n$

1) verifica per $n=1$ già dimostrato: $A=1$ e $B=-1$

2) supponiamo vero il teorema fino a $n-1$ e dimostriamolo per n
supponiamo che $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di $T \Rightarrow \lambda = +1$ o $\lambda = -1$
$\Rightarrow$ Sia $v \neq 0 \mid T(v) = \lambda v$ e considero $\langle\langle v \rangle\rangle \Rightarrow \langle\langle v \rangle\rangle$ é un sottospazio invariante per T
$\Rightarrow \langle\langle v \rangle\rangle^\perp$ é invariante per T cioé $T\big|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp} : \langle\langle v \rangle\rangle^\perp \to \langle\langle v \rangle\rangle^\perp$ con $T\big|_{\langle\langle v \rangle\rangle} = T$ isometrico

e $\dim \langle\langle v \rangle\rangle^\perp = n-1 \Rightarrow$ per ipotesi induttiva $\exists\ \mathcal{B}'_{\perp_n}$ di $\langle\langle v \rangle\rangle^\perp \mid \left[T\big|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp}\right]_{\mathcal{B}'_{\perp_n}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & M_s & & \\ 0 & & & \ddots & M_k \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$

Costruisco $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ così $\left\{\frac{v}{\|v\|}\right\} \cup \mathcal{B}'_{\perp_n} \Rightarrow \mathcal{B}$ é base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \left[T\big|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp}\right]_{\mathcal{B}'_{\perp_n}} \end{pmatrix}_{n \times n}$ (se si ha -1 é sufficiente porlo "all'interno" della parte con -1)

supponiamo che $\nexists$ autovalori reali per T

Necessario continuare con i complessi

Teorema di struttura per gli operatori isometrici di uno spazio euclideo

Sia $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un operatore isometrico

$\Rightarrow$ $\exists$ una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale la matrice associata a T ha la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & & & \\ & \vdots & & 1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & & M_1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & M_l \end{pmatrix}$$

con $M_i = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_i & -\operatorname{sen}\vartheta_i \\ \operatorname{sen}\vartheta_i & \cos\vartheta_i \end{pmatrix}$ $\quad i = 1, \dots, l$

Dimostrazione: per induzione su n = dimensione dello spazio

1) $n = 1$ $\quad T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: gli unici operatori isometrici su $\mathbb{R}$ sono $T(x) = x$ (l'identità) e $T(x) = -x$ (simmetria rispetto all'origine) e le matrici associate in base canonica sono $A = (1)$ e $A = (-1)$

2) Supponiamo il teorema dimostrato per dimensione dello spazio ambiente $< n$ e dimostriamolo per dimensione n.

Consideriamo il polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$ e una sua radice λ_0 :

se $\lambda_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_0 = +1$ o $\lambda_0 = -1 \Rightarrow$ consideriamo un autovettore $v \in E_T(\lambda_0)$, che possiamo prendere di norma unitaria $\Rightarrow T(v) = \pm v \Rightarrow \mathcal{U} = \langle\langle v \rangle\rangle$ è invariante per T e ha dimensione 1 $\Rightarrow \mathcal{U}^\perp$ è invariante per T e ha dimensione $n-1 \Rightarrow \mathbb{R}^n = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$ e posso considerare $T|_{\mathcal{U}^\perp} : \mathcal{U}^\perp \longrightarrow \mathcal{U}^\perp$: per tale operatore il teorema è dimostrato per ipotesi di induzione $\Rightarrow$ esiste in $\mathcal{U}^\perp$ una base ortonormale, $\mathcal{B}_1$, rispetto alla quale la matrice $\left[T|_{\mathcal{U}^\perp}\right]_{\mathcal{B}_1}$ ha la forma richiesta dal teorema

Ora prendiamo come base di $\mathbb{R}^n = \{v\} \cup \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ è ortonormale e $[T]_{\mathcal{B}}$ ha dunque la forma:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & \left[T|_{\mathcal{U}^\perp}\right]_{\mathcal{B}_1} \end{pmatrix}$$

richiesta dal teorema.

Sia ora $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_0 = \alpha + i\beta$; dimostriamo che esiste un sottospazio invariante di dimensione 2.

Considero il polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$ e $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ una sua radice con $\beta \neq 0$; sia $A - \lambda_0 I$, con $A = [T]_{\text{canonica}}$

$\Rightarrow p_T(\lambda_0) = |A - \lambda_0 I| = 0 \Rightarrow$ Il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda_0 I)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ha una soluzione non banale $Z = Z_x + i Z_y \in \mathbb{C}^n$

con $Z_x, Z_y \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ posto $[Z_x]_e = X$ e $[Z_y]_e = [Y]$

abbiamo $(A - \lambda_0 I)(X + iY) = 0$

$$A(X+iY) = \lambda_0 I (X+iY)$$

$$A(X+iY) = (\alpha + i\beta) I (X+iY) = (\alpha+i\beta)(X+iY)$$

$$AX + iAY = \alpha X - \beta Y + i(\beta X + \alpha Y)$$

$\Rightarrow$ devono essere uguagliate le parti reali e le parti immaginarie dei due numeri complessi

$$\Rightarrow \begin{cases} AX = \alpha X - \beta Y \\ AY = \beta X + \alpha Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(Z_x) = \alpha Z_x - \beta Z_y \\ T(Z_y) = \beta Z_x + \alpha Z_y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $V := \langle\langle Z_x, Z_y \rangle\rangle$ = sottospazio generato dei vettori Z_x e Z_y è invariante per T, poiché $T(V) \subseteq V$

Dimostriamo che Z_x e Z_y sono linearmente indipendenti:

Per assurdo, supponiamo $Z_y = \lambda Z_x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 1) \; T(Z_x) = \alpha Z_x - \beta \lambda Z_x = (\alpha - \beta\lambda) Z_x \\ 2) \; T(Z_y) = T(\lambda Z_x) = \lambda T(Z_x) = \beta Z_x + \alpha(\lambda Z_x) = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \end{cases}$$

moltiplichiamo 1) per λ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 1') \; \lambda T(Z_x) = (\lambda\alpha - \beta\lambda^2) Z_x \\ 2) \; \lambda T(Z_x) = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \end{cases} \Rightarrow \text{ uguagliamo i secondi membri}$$

$$\Rightarrow (\lambda\alpha - \beta\lambda^2) Z_x = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \Rightarrow$$

$$-\beta\lambda^2 Z_x = \beta Z_x \Rightarrow -(\beta\lambda^2 + \beta) Z_x = 0 \quad \text{ma } Z_x \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\beta(\lambda^2 + 1) = 0$: ma $\beta \neq 0$ perché $\lambda_0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ assurdo perché $\lambda \in \mathbb{R}$!

$\Rightarrow$ Z_x e Z_y sono linearmente indipendenti e quindi $\dim V = \dim \langle\langle Z_x, Z_y \rangle\rangle = 2$: posso considerare
$\mathcal{B}_V = \{Z_x, Z_y\}$ $\Rightarrow$ se $T_1 = T|_V$ abbiamo che

$$[T_1]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = A_2$$

Inoltre sappiamo che $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, perché è la norma dell'autovalore $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, che essendo autovalore di un operatore isometrico, deve avere norma unitaria
$\Rightarrow$ T_1 è invertibile e $[T_1^{-1}]_{\mathcal{B}_V} = [T_1]_{\mathcal{B}_V}^{-1} =$

$$= A_2^{-1} = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A_2^{-1} = A_2^T$$

$\Rightarrow$ A_2 è ortogonale

$T_1 = T|_V$ è un operatore isometrico su V $\Rightarrow$

$$T_1(Z_x)\cdot Z_x = Z_x \cdot T_1^{-1}(Z_x)$$

$$(\alpha Z_x - \beta Z_y)\cdot Z_x = Z_x \cdot (\alpha Z_x + \beta Z_y)$$

$$\cancel{\alpha(Z_x\cdot Z_x)} - \beta(Z_y \cdot Z_x) = \cancel{\alpha(Z_x \cdot Z_x)} + \beta(Z_x \cdot Z_y) \Rightarrow \beta(Z_x\cdot Z_y) = 0$$

essendo $\beta \neq 0$ $\Rightarrow$ $Z_x \cdot Z_y = 0$ $\Rightarrow$ Z_x e Z_y sono ortogonali

Si dimostra che $\|Z_x\|^2 = \|Z_y\|^2$:

$$T_1(Z_x)\cdot Z_y = Z_x \cdot T_1^{-1}(Z_y)$$

$$(\alpha Z_x - \beta Z_y)\cdot Z_y = Z_x \cdot (-\beta Z_x + \alpha Z_y)$$

$$\cancel{\alpha(Z_x \cdot Z_y)} - \beta(Z_y \cdot Z_y) = \cancel{\alpha(Z_x \cdot Z_y)} - \beta(Z_x \cdot Z_x) \Rightarrow \cancel{\beta}\|Z_y\|^2 = \cancel{\beta}\|Z_x\|^2$$

$\Rightarrow$ posto $\|Z_x\| = \|Z_y\| = \mu \neq 0$, prendiamo come base $\mathcal{B}'_V$ dello spazio V, formata dai vettori ortonormali w_1 e w_2 con $w_1 = \frac{Z_x}{\mu}$ e $w_2 = \frac{Z_y}{\mu}$; avremo $[T_1]_{\mathcal{B}'_V} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

poiché $T_1(w_1) = \frac{1}{\mu} T(Z_x) = \alpha \frac{Z_x}{\mu} - \beta \frac{Z_y}{\mu} = \alpha w_1 - \beta w_2$

e $T_1(w_2) = \frac{1}{\mu} T(Z_y) = \beta \frac{Z_x}{\mu} + \alpha \frac{Z_y}{\mu} = \beta w_1 + \alpha w_2$

$$\Rightarrow \quad [T_1]_{\mathcal{B}_V'} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Considero $V^{\perp}$, invariante per T, e per ipotesi di induzione, essendo $\dim V^{\perp} = n-2$, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}_{V^{\perp}}$, rispetto alla quale la matrice $\left[T|_{V^{\perp}}\right]_{\mathcal{B}_{V^{\perp}}}$ ha la forma richiesta.

Ora considero in $\mathbb{R}^n$ la base $\mathcal{B}_{V^{\perp}} \cup \mathcal{B}'_V = \mathcal{B} \Rightarrow$ la matrice associata a T in tale base sarà:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \left[T|_{V^{\perp}}\right]_{\mathcal{B}_{V^{\perp}}} & \\ & \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

come volevasi dimostrare. ■