23/10/2018

Proposizione: Sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertibile $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$

dove A^* è detta AGGIUNTA di A ed è la matrice $n\times n$ i cui elementi sono i complementi algebrici dei corrispondenti elementi di A.

Esempio: sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

$\exists A^{-1}$? Si, perchè $\det(A) \neq 0$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Verifica)}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \underset{3R_1 - R_2 \to R_2}{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)} \sim$$

$$\sim \underset{R_1 - R_2 \to R_1}{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)} \sim \underset{\text{(Verifica)}}{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)}$$

Proposizione Sia A una matrice $\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, triangolare superiore $\Rightarrow |A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Dimostrazione

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{\hat{i}\hat{1}}| = a_{11} |A_{\hat{1}\hat{1}}| = a_{11} \left(\sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{\hat{i}\hat{2}}| \right)$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \left| \left(A_{\hat{1}\hat{1}}\right)_{\hat{2}\hat{2}} \right| = a_{11} a_{22} a_{33} \left| \left(\left(A_{\hat{1}\hat{1}}\right)_{\hat{2}\hat{2}}\right)_{\hat{3}\hat{3}} \right| \cdots$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} \cdot a_{n-1,n-1} \cdot a_{nn}$$

c.v.d

Sia $A \in M_{n \times n}$ ed "e" e' operazione elementare "scambio di righe" $\Rightarrow$ $|A| = |e(A)|$? No

Esempio$_1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow e(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = -2$ $\qquad |e(A)| = 2$

Esempio$_2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 5$

$e(A) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |e(A)| = -5$

$|A| \neq |e(A)|$ e $\boxed{|A| = -|e(A)|}$ → Da dimostrare

Proposizione: Sia

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \begin{array}{c} \\ \\ i\to \\ \\ A' \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{array}{c} \\ \\ i\to \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} B'$$

Esempio:

$$\underset{\substack{\| \\ 3}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2+(-1) & 3+2 \end{vmatrix}} = \underset{\substack{\| \\ -1}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} + \underset{\substack{\| \\ 4}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (a_{ij}+b_{ij}) \left| A_{\hat{i}\hat{j}} \right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \left(a_{ij} \left| A_{\hat{i}\hat{j}} \right| + b_{ij} \left| A_{\hat{i}\hat{j}} \right| \right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left| A_{\hat{i}\hat{j}} \right|}_{|A'|} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} \left| A_{\hat{i}\hat{j}} \right|}_{|B'|}$$

c.v.d

(*) <u>Proposizione</u>: Sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ $A = \begin{array}{c} \\ i\to \\ \\ j\to \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(Parentesi: $\exists$ 1) la dimostrazione diretta : Prop: Ipotesi $\Rightarrow$ Tesi

2) la dimostrazione per assurdo: Prop: Ipotesi $\Rightarrow$ Tesi
Nego la Tesi e la prendo come nuova ipotesi, applico i ragionamenti logici necessari in modo corretto e arrivo a negare l'ipotesi iniziale

3) dimostrazione per induzione: SI BASA SUL 5° ASSIOMA DI PEANO: "Sia $A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow$ se $\forall a \in A$, $a+1 \in A$ E INOLTRE $0 \in A \Rightarrow A \equiv \mathbb{N}$"

PER I NATURALI:

Sia $P(n)$ una proposizione da dimostrare $\forall n \in \mathbb{N}$

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ è vera}\} \Rightarrow$ se:

1) passo $\boxed{\text{verifica}}$ per il più piccolo n possibile (SE $n=0$ NON PUÒ ESSERE PRESO)

2) passo: SI SUPPONE VERIFICATA $P(n)$ per $n = 1, \dots, k$; E LA SI DIMOSTRA PER $\boxed{n=k+1}$

$\Rightarrow$ per induzione su n, LA PROPOSIZIONE $P(n)$ È DIMOSTRATA $\forall n \in \mathbb{N}$

DIMOSTRIAMO LA PROPOSIZIONE (*) PER INDUZIONE SULL'ORDINE n DELLA MATRICE; 1) PASSO VERIFICHIAMO LA PROPOSIZIONE PER $n=2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$$

2° passo)

2) Supponiamo vera la proposizione fino a $n=k$

e dimostriamola per $n=k+1$

$$\text{Sia } A = \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ j \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots a_{1,k+1} \\ a_{i1} & a_{i\,k+1} \\ a_{j1} & a_{j\,k+1} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \sum_{p=1}^{k+1} (-1)^{1+p} a_{1p} \left| A_{\hat{1}\hat{p}} \right|$$

$A_{\hat{1}\hat{p}}$ sono matrici $k \times k$ con due righe uguali $\Rightarrow$

per ipotesi induttiva $|A_{\hat{1}\hat{p}}| = 0 \quad \forall p. \Rightarrow |A| = 0$

$\Rightarrow$ LA PROPOSIZIONE È DIMOSTRATA $\forall n \in \mathbb{N}$. c.v.d.