LEZIONE N° 1 26.09.18 (1)

· SISTEMI

- Definizione: un sistema lineare in n variabili reali e p equazioni è un insieme di p equazioni di 1° grado nelle n variabili date:

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \dots + a_{pn}x_n = \lambda_p \end{cases}$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, p$$
$$\forall j = 1, \dots, n$$

[RICORDO CHE:

$\forall$: "per ogni" (quantificatore universale)

$\exists$: "esiste" (quantificatore esistenziale)]

RISCRIVENDO IN FORMA PIU' COMPATTA, SI HA:

$$\Sigma : \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = \lambda_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j = \lambda_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j = \lambda_p \end{cases}$$

- Esempio: sistema lineare non omogeneo di 2 equazioni in 3 variabili

$$\Sigma : \begin{cases} -x_1 + \sqrt{2}\,x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

DATO IL SISTEMA Σ, POSSIAMO SEMPRE SCRIVERE
Il sistema lineare omogeneo associato: è IN QUESTO ESEMPIO

$$\Sigma_0 : \begin{cases} -x_1 + \sqrt{2}\, x_2 - \frac{2}{3} x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

- Risolvere un sistema lineare in n variabili reali e p equazioni, significa trovare delle n-uple di numeri reali che, sostituiti alle variabili, rendono ogni equazione del sistema un'identità.

- Metodo di eliminazione di Gauss
  - Ordinare le variabili
  - Bisogna che la prima variabile sia presente nella prima equazione
  - Sistemi equivalenti: sistemi che hanno lo stesso insieme di soluzioni.
  - Si moltiplicano PER UNO SCALARE I coefficienti DI UNA equazioni in modo che sommandole CON UNA SECONDA ~~equazione~~ ~~in modo~~ si elimini una variabile

esempio:
$$\begin{cases} -x_1 + \sqrt{2}\, x_2 - \frac{2}{3} x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
SOMMIAMO MEMBRO A MEMBRO LE DUE EQUAZIONI E

SOSTITUIAMO LA LORO SOMMA ALLA II EQUAZIONE:
$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + \sqrt{2}\, x_2 - \frac{2}{3} x_3 = 1 \\ \cancel{-x_1} + \sqrt{2}\, x_2 - \frac{2}{3} x_3 \cancel{+x_1} - x_3 = 1 \end{cases}$$
$\Rightarrow$ SOMMIAMO I

TERMINI SIMILI NELLA NUOVA EQUAZIONE
$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + \sqrt{2}\, x_2 - \frac{2}{3} x_3 = 1 \\ \sqrt{2}\, x_2 - \frac{5}{3} x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$
ORA ELIMINIAMO x_2 DALLA PRIMA EQUAZIONE,

SOSTITUENDO ALLA I EQUAZIONE LA DIFFERENZA II Eq − I Eq
$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{\sqrt{2}\, x_2} - \frac{5}{3} x_3 + x_1 - \cancel{\sqrt{2}\, x_2} + \frac{2}{3} x_3 = 0 \\ \sqrt{2}\, x_2 - \frac{5}{3} x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

QUESTO È IL SISTEMA FINALE IN CUI 1 VARIABILE, X_3, È UN PARAMETRO

3

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ \sqrt{2}\,X_2 - \frac{5}{3}X_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = X_3 \\ X_2 = \frac{5}{3\sqrt{2}}X_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ X_3 = 0 \end{cases}$$ (OTTENUTO PONENDO $X_3 = 0$)

$(0, 1/\sqrt{2}, 0) \rightarrow$ terna che rende ogni equazione del sistema un'identità QUINDI È UNA SOLUZIONE DI Σ: IN QUESTO CASO NON È L'UNICA! NE HO ∞, OTTENUTE CAMBIANDO IL PARAMETRO X_3

· Metodo di Gauss: SI ADOPERANO DELLE OPERAZIONI CON LE EQUAZIONI DETTE OPERAZIONI ELEMENTARI, CHE SONO:

1) - Scambiare le equazioni nel sistema
2) - Moltiplicare un'equazione per un numero ($\neq 0$)
3) - Sommare o sottrarre le equazioni

· Esempio: $\begin{cases} 2X_2 - X_3 = 1 \\ X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ -2X_1 + X_2 = -1 \end{cases}$ ← Sistema lineare in 3 variabili non omogeneo

$$\begin{cases} -2X_1 + X_2 = -1 \\ 2X_2 - X_3 = 1 \\ X_1 + X_2 - X_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2X_1 + X_2 = -1 \\ 2X_2 - X_3 = 1 \\ 3X_2 - 2X_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\boxed{Eq_1 + 2Eq_2}$: combinazione lineare di Eq_1 e Eq_2

$$\begin{cases} -2X_1 + X_2 = -1 \\ 2X_2 - X_3 = 1 \\ -X_3 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2X_1 + X_2 = -1 \\ 2X_2 - X_3 = 1 \\ X_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$\boxed{-3Eq_2 + 2Eq_3}$

$$\begin{cases} -2X_1 + X_2 = -1 \\ 2X_2 = 6 \\ X_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 2 \\ X_2 = 3 \\ X_3 = 5 \end{cases}$$

$\boxed{Eq_2 + Eq_3}$ $\boxed{Eq_1 - Eq_2}$

$(2, 3, 5) \rightarrow$ terne soluzione; QUESTA VOLTA È UNICA

- I primi coefficienti non nulli di ogni EQUAZIONE NEL SISTEMA RIDOTTO A GRADINI SI CHIAMANO PIVOT
- Il numero di pivot determina il rango di un sistema.