27/3/'19

**ES** Se $F$ è il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$, $\exists$ vettori $F$-isotropi?

$F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \to x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$F((v,v)) = 0$ $\qquad F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 0$

il risultato è uguale a $\emptyset$ solamente se tutte le entrate sono uguale a $\emptyset$

$\Rightarrow$ NON ESISTONO VETTORI ISOTROPI NON NULLI.

**ESERCIZIO PER CASA**

Dimostrare che due vettori $v, w \in V$ $F$-coniugati secondo una forma bilineare simmetrica $F: V \times V \to K$ e non isotropi, sono lin. indipendenti

**Proposizione:** Sia $V$ sp. vettoriale $n$-dimensionale su $K$, $F: V \times V \to K$ forma bilineare simmetrica e $\mathcal{U}$ sottospazio $k$-dimensionale di $V$ privo di vettori isotropi

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}^\perp$ (complemento $F$-ortogonale di $\mathcal{U}$) è uno sottospazio vettoriale di $V$ di dimensione $n-k$ e tale che

$$\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp = V$$

**Dimostr:** Prendo $B_\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_k\}$; $\mathcal{U}^\perp = \{v \in V \mid F((v,u)) = 0 \ \forall u \in \mathcal{U}\}$

$\Rightarrow$ cerco dunque i vettori $v \in V \mid F((v, u_j)) = 0 \ \forall j = 1, \dots, k$

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}^\perp$ sarà lo spazio delle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} F((v,u_1)) = 0 \\ F((v,u_2)) = 0 \\ \vdots \\ F((v,u_k)) = 0 \end{cases}$$

Fissata la base $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\Rightarrow$ $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ $\Rightarrow$
$$\begin{cases} F\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, u_1\right)\right) = 0 \\ \vdots \\ F\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, u_k\right)\right) = 0 \end{cases}$$

e posso riscriverlo così
$$\Sigma_0: \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i F((v_i, u_1)) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i F((v_i, u_k)) = 0 \end{cases}$$

sistema lineare omogeneo di $k$ equazioni ed $n$ incognite $k \leq n$

Devo dimostrare che il rango di $\Sigma_0$ è $K$, per fare ciò devo prima dimostrare che le $K$-equazioni di $\Sigma_0$ sono lin. indipendenti

$$\begin{cases} F((v,u_1))=0 \\ \vdots \\ F((v,u_k))=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Considero } \lambda_1 F((v,u_1)) + \lambda_2 F((v,u_2)) + \dots + \lambda_k F((v,u_k))=0$$

$\Rightarrow$ Per la linearità sulla seconda componente si ha $F((v, \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k))=0$ $\underline{\forall v \in V}$

$\Rightarrow$ Deve valere anche per il vettore $v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j$, cioè $F((\sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j))=0$

$\Rightarrow$ il vettore $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j$ è un vettore di $\mathcal{U}$ isotropo, ma per ipotesi l'unico vettore isotropo di $\mathcal{U}$ è $\underline{0}=0$ $\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j = 0 \iff \lambda_j = 0 \ \forall j=1,\dots,k$
essendo $B_{\mathcal{U}} = \{u_1, \dots, u_k\}$
base di $\mathcal{U}$

$\Rightarrow \operatorname{rg} \Sigma_0 = K \to \dim \mathcal{U}^\perp = n-K$

Dimostriamo che $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{0\}$ : infatti se $u \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp \Rightarrow F((u,u))=0$

$\Rightarrow$ $u$ è $F$-isotropo $\Rightarrow u=0$

$$\dim(\mathcal{U}+\mathcal{U}^\perp) = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{U}^\perp - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp)$$
$$= k + (n-k) - 0 = n \Rightarrow \boxed{\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp = V}$$

c.v.d.

POICHÉ $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp = V$ :

Osservazione: Dato $v \in V \Rightarrow$ se $\mathcal{U} \leq V$ privo di vettori $F$-isotropi $\Rightarrow v = u + w$ con $u \in \mathcal{U}$ e $w \in \mathcal{U}^\perp$, $u,w$ sono univocamente determinati, $u$ è detto la proiezione $F$-ortogonale di $v$ su $\mathcal{U}$ e $w$ è la proiezione $F$-ortogonale di $v$ su $\mathcal{U}^\perp$.

ES Diamo il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^4$ $F: \cdot : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$(v,w) \to v \cdot w = \langle v, w \rangle$$
$$\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right) \to \sum_{j=1}^{4} x_j y_j$$

Prendo $\mathcal{U}$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$, con $\dim \mathcal{U} = 1$ (cioè una retta in $\mathbb{R}^4$)

$$\mathcal{U} = \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \operatorname{rg} A = 3$$

Dare $U^\perp$

cerco $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot u = 0 \ \forall u \in U\}$ $\Rightarrow$ data una base $B_U = \{u_1\}$

$\Rightarrow$ cerco $v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot u_1 = 0$

$U = \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_4 \\ x_3 = 2x_1 \end{cases}$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -2 | 2 |

$\Rightarrow B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ $\Rightarrow v \cdot u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = u_1$

$= x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$

$= U^\perp$ = SPAZIO 3-DIMENSIONALE DI $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO PER CASA}}$

Dare la proiezione ortogonale di $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su $U = \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$

<u>Proposizione</u>: Sia $F: V \times V \to K$ forma bilineare simmetrica degenere $\Rightarrow$ F ha vettori isotropi non nulli

<u>Proposizione</u>: Sia $F: V \times V \to K$ forma bilineare simmetrica non degenere $\Rightarrow$ F <u>può</u> avere vettori isotropi NON NULLI

$\boxed{\text{PER CASA: Dare un esempio}}$

<u>Proposizione</u>: Sia $F: V \times V \to K$ (con K campo di $\operatorname{ch} K \neq 2$) sia F forma bilineare simmetrica non nulla $\Rightarrow \exists$ almeno un vettore $v \in V$ <u>non isotropo</u>

<u>Proposizione</u>: Sia $F: V \times V \to K$, $\operatorname{ch} K \neq 2$, F f. bil. simmetrica, $\Rightarrow \exists$ sempre una base F-ortogonale

<u>Dimostr.</u>: Per induzione sulle dimensioni n di V

1. $n = 1$ è composto da un solo vettore, che è per forza F-ortogonale

2. Supponiamo vera la proposizione fino alla dimensione di V $n-1$ e lo dimostriamo per $\dim V = n$.
   Sappiamo che $\exists$ sempre un vettore $\tilde{v} \in V$ non F-isotropo

Prendo $\boxed{\mathcal{U} = \langle\langle \tilde{v} \rangle\rangle}$ è una retta in $V$

$\mathcal{U}$ è privo di vettori F-isotropi poiché $F((\alpha\tilde{v}, \alpha\tilde{v})) = \alpha^2 F((\tilde{v}, \tilde{v})) \neq 0 \quad \forall \alpha \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{U}^\perp \subset V$ con $\dim \mathcal{U}^\perp = n-1$

Se considero $F|_{\mathcal{U}^\perp \times \mathcal{U}^\perp} : \mathcal{U}^\perp \times \mathcal{U}^\perp \to K$ è ancora f. bil. simmetrica

poiché $F|_{\mathcal{U}^\perp \times \mathcal{U}^\perp} \equiv F \Rightarrow$ Per ipotesi induttiva esiste una base

F-ortogonale di $\mathcal{U}^\perp$ : $B_{\mathcal{U}^\perp} = \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$

Inoltre ricordo che $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp = V \Rightarrow$ di conseguenza l'insieme $\{\tilde{v}, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$ è una base di $V$ formato da vettori F-ortogonali

c.v.d.

Conseguenza : Supposto $\operatorname{ch} K \neq 2 \Rightarrow$ ogni matrice simmetrica con entrate in $K$ è congruente ad una matrice diagonale

Definizione : Una forma bilineare simmetrica $F : V \times V \to \mathbb{R}$ è detta

- DEFINITA POSITIVA se $F((v,v)) > 0 \quad \forall v \neq 0$
- POSITIVA (semidefinita positiva) se $F((v,v)) \geq 0 \quad \forall v \in V$
- DEFINITA NEGATIVA se $F((v,v)) < 0 \quad \forall v \neq 0$
- NEGATIVA (semidefinita negativa) se $F((v,v)) \leq 0 \quad \forall v \in V$
- INDEFINITA se non è nessuna delle altre