28/11/2018

PIANI IN $\mathbb{R}^3$: sono spazi di soluzione di sistemi lineari NON omogenei (in generale) di 3 variabili e 1 equazione [infatti $3-1=2$]:

$ax+by+cz=d$

i piani in $\mathbb{R}^3$ sono enti geometrici di dimensione 2

Per trovare l'equazione parametrica dell'affine, dobbiamo trovare la soluzione generale del sistema data dalla somma di una soluzione particolare di Σ (sistema lineare non omogeneo) con la soluzione generale di Σ_0 $\Rightarrow$ se la soluzione ~~generale~~ particolare è $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$ e la soluzione generale di Σ_0 è $sX_0 + t \cdot X_1$, dove X_0 e X_1 sono soluzioni fondamentali di ~~de~~ Σ_0. $\Rightarrow$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{sX_0 + tX_1 + \tilde{X}}_{\text{eq. vettoriale da cui la parametrica}}$

Esempio:

$x+y-z=1$ (piano in $\mathbb{R}^3$)

1. cerco $\tilde{X}$, ossia la soluzione particolare del sistema e per farlo: $x = -y+z+1 \Rightarrow \tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (dove ho dato a piacere $y=0$ e $z=0$, da cui è risultato $x=1$)

2. Considero $x+y-z=0 \Rightarrow z = x+y \Rightarrow$ (dove ho scelto io di lasciare libera la z in questo caso, dando prima valore a x e y.)

z	x	y
1	0	1
1	1	0

$\Rightarrow$ le soluzioni fondamentali sono $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ la soluzione GENERALE è $s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

③ Solo ora siamo in grado di dare la soluzione di Σ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ equ. VETTORIALE DI $Sol\,\Sigma$

da cui deriva l'eq. PARAMETRICA :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = s \\ z = s + t \end{cases}$$

$$x + y - z = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{equ. PARAMETRICA: } \begin{cases} x = -s + t + 1 \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

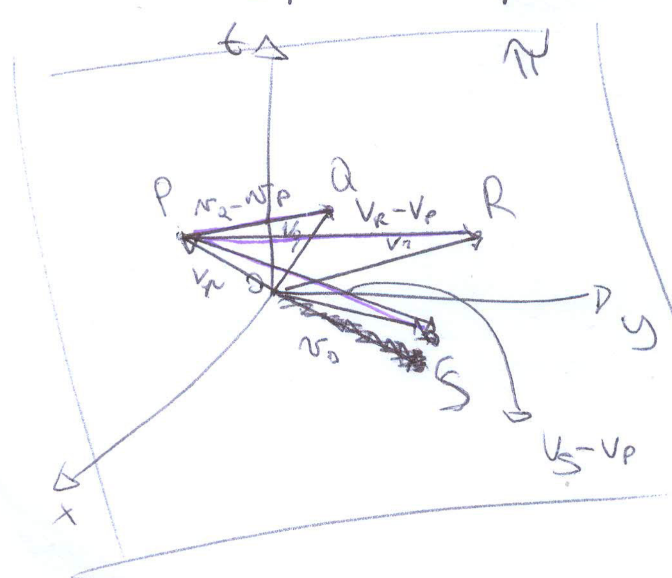
più velocemente si fa così e la spiegazione è tutto il procedimento appena fatto.

equ. VETTORIALE: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ In questo modo lo vediamo come sottospazio affine e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è il vettore della TRASLAZIONE.

Quando 4 punti appartengono allo stesso piano π ??

Dati P, Q, R, S (quattro punti con determinate coordinate)



Considero i vettori e poi i vari vettori differenza e poi mi chiedo se stanno nel piano π_0. Per farlo i vettori devono essere linearmente dipendenti.

$$P=\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} \quad Q=\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} \quad R=\begin{pmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{pmatrix} \quad S=\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix}$$

$$V_Q - V_P = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$$

$$V_R - V_P = \begin{pmatrix} x_R - x_P \\ y_R - y_P \\ z_R - z_P \end{pmatrix}$$

$$V_S - V_P = \begin{pmatrix} x_S - x_P \\ y_S - y_P \\ z_S - z_P \end{pmatrix}$$

gli impongo di essere linear. dipendenti:

$$\det\begin{pmatrix} x_Q - x_P & x_R - x_P & x_S - x_P \\ y_Q - y_P & y_R - y_P & y_S - y_P \\ z_Q - z_P & z_R - z_P & z_S - z_P \end{pmatrix} = 0$$

Considero la trasposta perché conviene IN QUANTO VOGLIO ADOPERARE LE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA

$$\begin{pmatrix} x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P \\ x_R - x_P & y_R - y_P & z_R - z_P \\ x_S - x_P & y_S - y_P & z_S - z_P \end{pmatrix}$$

ora la posso vedere come una sottomatrice DELLA MATRICE 4x4 OTTENUTA MEDIANTE OPERAZIONI RIGA DALLA MATRICE:

$$A=\begin{pmatrix} x_P & y_P & z_P & 1 \\ x_Q & y_Q & z_Q & 1 \\ x_R & y_R & z_R & 1 \\ x_S & y_S & z_S & 1 \end{pmatrix}$$

infatti se alla 2ª, 3ª e 4ª riga sottraggo la prima (operazioni elementari riga), ottengo:

$$A' = \begin{pmatrix} x_P & y_P & z_P & 1 \\ x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P & 0 \\ x_R - x_P & y_R - y_P & z_R - z_P & 0 \\ x_S - x_P & y_S - y_P & z_S - z_P & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A' = 1 \cdot \begin{vmatrix} x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P \\ x_R - x_P & y_R - y_P & z_R - z_P \\ x_S - x_P & y_S - y_P & z_S - z_P \end{vmatrix}$$

Quindi OCCORRE che il det della matrice precedente A SIA $= 0$ AFFINCHÉ I 4 PUNTI APPARTENGANO ALLO STESSO PIANO

Così facendo ottengo l'eqn del piano che passa per quei 3 punti (Q, R, S) PONENDO $X_P = X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ VARIABILE.

(Analogamente in $\mathbb{R}^2$ abbiamo l'eqn di una retta passante per 2 punti)

PARALLELISMO fra sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$

$\boxed{1}$ Quando π_1 e π_2 sono $\parallel$?

(A) Se $\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$

e $\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$

$\Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$: il sottospazio vettoriale $a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$ è lo stesso di quello definito da $a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$

Questo è vero SE e SOLO SE $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

(B) Se ~~sono~~ I PIANI dati IN FORMA PARAMETRICA: $\pi_1 = \begin{cases} x = s l_1 + t l_2 + \tilde{x} \\ y = s m_1 + t m_2 + \tilde{y} \\ z = s n_1 + t n_2 + \tilde{z} \end{cases}$

e $\pi_2 = \begin{cases} x = s h_1 + t h_2 + \hat{x} \\ y = s k_1 + t k_2 + \hat{y} \\ z = s p_1 + t p_2 + \hat{z} \end{cases}$

Mi chiedo se il sottospazio generato da

$$\left\langle\left\langle \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle \text{ sia uguale a } = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} h_1 \\ k_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_2 \\ k_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$$

per farlo mi costruisco la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & h_1 & h_2 \\ m_1 & m_2 & k_1 & k_2 \\ n_1 & n_2 & p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

la quale avrà $Rg = 2$
E se vedo che sono linear dipendenti vedo che stanno nello stesso sottospazio.

PARALLELISMO TRA DUE RETTE:

Consideriamo due rette in $\mathbb{R}^3$: r_1 e r_2 e mi chiedo quando esse sono $\parallel$.

$$r_1 = \Sigma_1 = \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

$Rg\,\Sigma_1 = 2$ (altrimenti non abbiamo una retta)

$$\Sigma_2 = r_2 = \begin{cases} a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z = d_4 \end{cases}$$

$Rg\,\Sigma_2 = 2$

Se voglio studiare l'intersezione delle 2 rette lo posso fare con il sistema di 4 equazioni e 3 variabili. che considero $\Sigma : \begin{cases} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \end{cases}$, che diventa MATRICIALMENTE:

POSTO $A \in \underbrace{\mathcal{M}_{4\times 3}}_{\text{MATRICE DEI COEFFICIENTI}} \Rightarrow \Sigma : A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$

$\boxed{\text{Per CASA}}$ $\rightarrow$ studiare le possibilità per Sol Σ e quindi per $r_1 \cap r_2$ (da un punto di vista algebrico, con il Rg delle matrici): A può avere Rg solo 2 o 3, quindi poi devi discutere ciò che succede in base al Rg di B.

(Se A è ... e B è ... $\boxed{\text{COSÌ}}$)

Tornando alla domanda iniziale:
la matrice A deve avere $Rg = 2$ $\quad r_1 \parallel r_2 \Rightarrow rg A = 2$

$$r_1 = \begin{cases} x = s l_1 + x_1 \\ y = s m_1 + y_1 \\ z = s n_1 + z_1 \end{cases}$$

l_1, m_1, n_1 sono i parametri DIRETTORI di r_1

$$r_2 = \begin{cases} x = t l_2 + x_2 \\ y = t m_2 + y_2 \\ z = t n_2 + z_2 \end{cases}$$

l_2, m_2, n_2 sono i parametri DIRETTORI di r_2

$$r_1 \parallel r_2 \iff \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

poiché lo sono solo se hanno la stessa direzione e ce l'hanno se i parametri direttori sono PROPORZIONALI.

Quando la retta e il piano sono $\parallel$? SE IL PIANO

$$\pi : \begin{cases} x = t l_2 + r l_3 + \tilde{x} \\ y = t m_2 + r m_3 + \tilde{y} \\ z = t n_2 + r n_3 + \tilde{z} \end{cases}$$

È DATO CON EQUAZIONE PARAMETRICA

E LA RETTA SIA IN EQUAZIONE PARAMETRICA $r :$ $\begin{cases} x = s l_1 + x_1 \\ y = s m_1 + y_1 \\ z = s n_1 + z_1 \end{cases}$

$$\Rightarrow r \parallel \pi \iff \det \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = 0$$

POICHÉ $r \parallel \pi$ se e soltanto se la direzione della retta ~~...~~ è contenuta in quella del piano (in generale quella DI DIMENSIONE più piccola sta in quella più grande).

SE IL PIANO È DATO IN EQUAZIONE AFFINE:

$\pi : ax + by + cz = d$

$\Rightarrow \operatorname{dir} r \subset \operatorname{dir} \pi$ $\qquad ax + by + cz = 0$

CI STA DENTRO:
Se le coordinate del vettore $\underbrace{\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}}_{\text{BASE DELLA DIREZIONE DI } r}$ soddisfano l'equazione del piano.

$$\boxed{r_1 \parallel \pi \iff a l_1 + b m_1 + c n_1 = 0}$$